Correction du bac blanc 1

exo 1

A.

1. $g'(x) = -1 + e^x$

Posons $g'(x) \geq 0$

$-1 + e^x \geq 0$

$e^x \geq 1$

$x \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. g admet $2>0$ comme minimum sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

B. 1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}\right\} \text{ Donc } \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (cours)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $$f'(x) = 1 + \frac{1 \times e^x - e^x \times x}{(e^x)^2}$$

$$= 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x(1-x)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x(e^x + 1 - x)}{e^{2x}}$$

$$= \frac{g(x)}{e^x}$$

$$= e^{-x} \cdot g(x)$$

3. Comme $e^{-x} > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

4a. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$0 \in]-\infty ; +\infty[$.

D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet 1 unique solution α sur $\mathbb{R}$.

$f(-1) = -e < 0$

$f(0) = 1 > 0$ Donc $\alpha \in [-1 ; 0]$.

b. D'après la calculatrice, $-0{,}41 < \alpha < -0{,}40$

c.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5 a. $f''(x) = (x-2)e^{-x}$

$e^{-x} > 0$ Donc $f''(x)$ est du signe de $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

* $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 2]$, donc f est concave.
* $f''(x) \geq 0$ sur $[2 ; +\infty[$ donc f est convexe.

b. $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=2$,
Donc f admet un point d'inflexion.

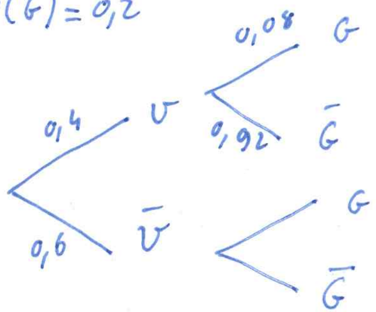
$f(2) = 3 + \frac{2}{e^2}$. $\quad (2 ; 3 + \frac{2}{e^2})$.

---

exo 2

1 a $P(G) = 0{,}2$

b



2. $P(U \cap G) = P(U) \times P_U(G)$
$= 0{,}4 \times 0{,}08$
$= 0{,}032$

3 $P_{\bar{U}}(G) = \dfrac{P(\bar{U} \cap G)}{P(\bar{U})}$

Or $P(G) = P(G \cap U) + P(G \cap \bar{U})$

Donc $P(G \cap \bar{U}) = P(G) - P(G \cap U)$
$= 0{,}2 - 0{,}032$
$= 0{,}168$.

Donc $P_{\bar{U}}(G) = \dfrac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28$

B. 1. X suit une loi binomiale, car on est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}4$, car on interroge 40 personnes de manière identique et indépendante.

2 a. $P(X = 15) \simeq 0{,}123$ à 10^{-3} près

b. $P(X \geq 20) \simeq 0{,}130$ à 10^{-3} près

c. $E(X) = np$
$= 40 \times 0{,}4$
$= 16$ personnes en moyenne sont vaccinées

mo 3

1. diminution de 10% : $u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = 0,9 u_n$

Augmentation de 100 individus : $0,9 u_n + 100$

Donc $u_{n+1} = 0,9 u_n + 100$.

2. $u_1 = 0,9 \times u_0 + 100$
$= 0,9 \times 2000 + 100$
$= 1900$

$u_2 = 0,9 u_1 + 100$
$= 0,9 \times 1900 + 100$
$= 1810$.

3. (I) $u_0 = 2000$
$u_1 = 1900$

Donc $1000 \leq u_1 \leq u_0$
vraie pour $n = 0$

(H) supposons qu'il existe un entier n, tq :
$1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Mq $1000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

On a $1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$
$900 \leq 0,9 u_{n+1} \leq 0,9 u_n$ car $0,9 > 0$
$900 + 100 \leq 0,9 u_{n+1} + 100 \leq 0,9 u_n + 100$
$1000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

4. $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante
$1000 \leq u_n$ donc (u_n) est minorée.

Donc (u_n) converge.

5. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$
$= 0,9 u_n + 100 - 1000$
$= 0,9 u_n - 900$
$= 0,9 (u_n - 1000)$
$= 0,9 v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,9.

b. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1000$
$v_0 = 2000 - 1000$
$v_0 = 1000$.

Donc $v_n = v_0 \cdot 9^n$
$v_n = 1000 \times 0,9^n$

De plus $v_n = u_n - 1000$

Donc $u_n = v_n + 1000$
$u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000$
$u_n = 1000 (0,9^n + 1)$

c. $\lim_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000$

Donc la population va tendre vers 1000 individus.

6 a. $u_n \leqslant 1200$

$1000\left(1+0{,}9^n\right) \leqslant 1200$

$1+0{,}9^n \leqslant 1{,}2$

$0{,}9^n \leqslant 0{,}2$

$\ln(0{,}9^n) \leqslant \ln(0{,}2)$

$n\ln(0{,}9) \leqslant \ln(0{,}2)$

$n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)}$

$n \geqslant 15{,}28$

Donc à partir de $n = 16$.

b.

```
def populations(s) :
    n = 0
    u = 2000

    while u > s
        u = 1000 ( 1+0,9^n )
        n = n+1
        return (n)
```

exo 4

1 b. car

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

2 a car on a

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'		↗		↘	

3 c Comme f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ alors

f' ↗ sur $]-\infty ; -\frac{3}{2}]$, $f''(x) \geqslant 0$

f' ↘ sur $[-\frac{3}{2} ; +\infty[$ $f''(x) \leqslant 0$

Donc $f''\left(\frac{-3}{2}\right) = 0$

4 b $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. (v_n) est donc minorée par u_0.