Correction BB3

Exercice 1 *5 points*

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

1. On détermine les limites de g en $+\infty$ et 0.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} 2x-2 = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$$
2. La fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.
3. On établit le tableau des variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0~;~+\infty[$.

4. $g(1) = 0$ donc $\alpha = 1$.
On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0~;~1[$, et que $g(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.

Partie II : étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0~;~+\infty[$par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 1]$.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$
b. Sur $]0~;~+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 1$.
$f(1) = \left(2 - \dfrac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$
On dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. $f(x) = 0 \iff \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln(x) - 1 = 0$

$$\iff 2 = \frac{1}{x} \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \mathrm{e}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0 ; +\infty[$: $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \mathrm{e}$.

On complète le tableau de variations de f en intégrant les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	

On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0 ; +\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$. On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Par définition $F' = f$, donc le signe de $F'(x)$ est celui de $f(x)$. On en déduit les variations de la fonction F sur $]0 ; +\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
F	‖	F croissante		F décroissante		F croissante	

2. Le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F est $F'(a)$ soit $f(a)$. Pour que $\mathscr{C}_F$ admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de x pour lesquelles $F'(x) = 0$ c'est-à -dire $f(x) = 0$.

D'après les questions précédentes, on peut dire $\mathscr{C}_F$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \mathrm{e}$.

Exercice 2 *5 points*

Partie A

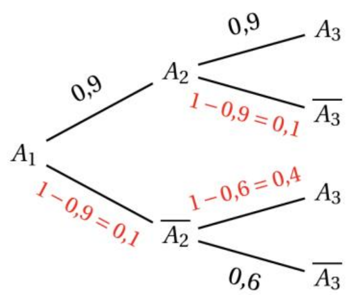
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. a. On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.



b. D'après la formule des probabilités totales :

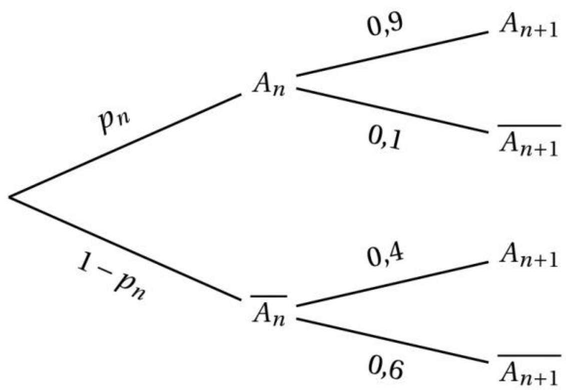
$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right) \\ &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}81 + 0{,}04 = 0{,}85 \end{aligned}$$

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}85} \approx 0{,}95.$$

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0{,}9 + \left(1 - p_n\right) \times 0{,}4 = 0{,}5p_n + 0{,}4.$$

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

- **Initialisation**
  On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  Soit un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $p_k > 0,8$.
  C'est l'hypothèse de récurrence.
  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0,8$ donc $0,5p_k > 0,4$ et donc $0,5p_k + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{k+1} > 0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.
Or $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ donc $-0,5p_n < -0,4$ et donc $0,4 - 0,5p_n < 0$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par 0,8.
On a vu aussi que la suite (p_n) était décroissante.
D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente.

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.

a.
- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite 0,8.

Partie B

1. Un matin, le vendeur reçoit 20 clients. On suppose que la probabilité qu'un client achète un melon est 0,8.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant un melon.
a. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,8$ car il y a répétition d'expériences identiques et indépendantes.

b. $E(X) = np = 20 \times 0,8 = 16$. En moyenne 16 clients sur les 20 achètent un melon.

c. $P(X \geq 10) \approx 0,999$.

2.

$P(X \geq 1) \geq 0,95$

$1 - P(X = 0) \geq 0,95$

$1 - (1 - 0,8)^n \geq 0,95$

$1 - 0,2^n \geq 0,95$

$-0,2^n \geq -0,05$

$0,2^n \leq 0,05$

$\ln(0,2^n) \leq \ln(0,05)$

$n \ln(0,2) \leq \ln(0,05)$

$n \geq \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,2)}$

$n \geq 1,86$

Soit au moins 2 clients.

Exercice 3 *5 points*

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Solution : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par C(0 ; 3 ; 2)

on obtient une représentation paramétrique de (CD) : $\begin{cases}x=t\\y=3\\z=2-t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

2. Soit M un point de la droite (CD).

a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Solution : B(4 ; −1 ; 0). Soit t le paramètre associé à M alors M(t ; 3 ; $2-t$).
Alors $BM^2=(t-4)^2+(4)^2+(2-t)^2=2t^2-12t+36=2(t^2-6t+18)$.
BM est minimale quand BM^2 l'est c'est-à-dire quand $t^2-6t+18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme at^2+bt+c avec $a>0$ admet un minimum en $t=-\dfrac{b}{2a}$
ici BM sera donc minimale pour $t=3$ soit pour M(3 ; 3 ; −1).

b. **Solution :** $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

c. **Solution :** D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.
On a alors $\mathscr{A}_{BCD}=\dfrac{1}{2}\times CD\times BH=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{32}\times\sqrt{18}=\sqrt{144}=12$ (en u. a.).
L'aire de BCD est donc bien de 12 cm^2.

3. **a.** **Solution :**
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-8+4+4=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{CD}=8+0-8=0$.
$\overrightarrow{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. **Solution :**
$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD) : $2x+y+2z+d=0$.
C(0 ; 3 ; 2) appartient à (BCD) donc $2x_C+y_C+2z_C+d=0$ ce qui donne $d=-7$.

Finalement (BCD) : $2x+y+2z-7=0$.

c. **Solution :** Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta : \begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \\ z=4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

d. **Solution :** I est un point de (BCD) donc $2x_I+y_I+2z_I-7=0$
De plus $I\in\Delta$ donc il existe un réel t tel que
$2(2+2t)+(1+t)+2(4+2t)-7=0 \iff 9t=-6 \iff t=-\dfrac{2}{3}$.
On en déduit $I\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$.
Remarque : on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD).

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD.
$AI=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2}=2$.
$\mathcal{V}_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\times AI\times\mathcal{A}_{BCD}=8$ (en cm^3).
Le volume du tétraèdre est 8 cm^3.

Exercice 4 *5 points*

Partie A

1. La colonne C donne les différentes valeurs de b_n. Comme pour tout n, $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n$, la formule à entrer dans la cellule C3 et à recopier vers le bas est :

$$\boxed{= \frac{2}{3} * \text{B2} + \frac{1}{2} * \text{C2} + \frac{2}{3} * \text{D2}}$$

2. D'après ce tableau, on peut dire que

- la probabilité que le lapin se retrouve à long terme dans la galerie A est 0,214 ;
- la probabilité que le lapin se retrouve à long terme dans la galerie B est 0,571 ;
- la probabilité que le lapin se retrouve à long terme dans la galerie C est 0,214.

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.

a. Pour tout n, $u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{3}c_n$

$$= \frac{1}{3}\left(a_n - c_n\right) = \frac{1}{3}u_n.$$

$u_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n ; donc $b_n = v_n + \frac{4}{7}$.

a. Les nombres a_n, b_n et c_n représentent à l'étape n, les probabilités que le lapin se trouve respectivement dans la galerie A, dans la galerie B ou dans la galerie C. Il n'y a pas d'autre possibilité pour le lapin donc la somme de ces trois probabilités doit être égale à la probabilité de l'événement certain, c'est-à-dire 1 : pour tout n, $a_n + b_n + c_n = 1$.

On en déduit que $a_n + c_n = 1 - b_n$.

$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n = \frac{2}{3}\left(a_n + c_n\right) + \frac{1}{2}b_n = \frac{2}{3}\left(1 - b_n\right) + \frac{1}{2}b_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}b_n$

$v_{n+1} = b_{n+1} - \frac{4}{7} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}b_n\right) - \frac{4}{7} = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right) - \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}v_n - \frac{2}{21} = -\frac{1}{6}v_n$

b. D'après la question précédente, on peut dire que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = b_0 - \frac{4}{7} = 0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$.

On en déduit que pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

3. On a vu que, pour tout n, $b_n = v_n + \frac{4}{7}$ et que $v_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$. On en déduit que $b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

On a vu précédemment que $a_n + c_n = 1 - b_n$.

On en déduit que $a_n + c_n = 1 - \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) = 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

On a vu aussi que, pour tout n, $u_n = a_n - c_n$ et que $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; on en déduit que $a_n - c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n + c_n &=& \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ a_n - c_n &=& \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a_n &=& \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ c_n &=& a_n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a_n &=& \frac{3}{14} + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ c_n &=& \left(\frac{3}{14} + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a_n &=& \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ c_n &=& \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{array}\right.$$

4. La position du lapin après un très grand nombre d'étapes est donnée par les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini.

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$; $-1 < -\frac{1}{6} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{14}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{4}{7}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{3}{14}$.

La probabilité qu'après un très grand nombre d'étapes, le lapin

- se trouve dans la galerie A tend vers $\frac{3}{14}$;
- se trouve dans la galerie B tend vers $\frac{4}{7}$;
- se trouve dans la galerie C tend vers $\frac{3}{14}$.