BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION MARS 2022

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU JEUDI 10 MARS 2022

Ce sujet comporte pages numérotées de page 1/6 à page 6/6

Exercice 1 *5 points*

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?

2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

4. Compléter l'algorithme qui permet de calculer u_{30}.

```
Def terme ()
    n = 0
    u = 1
    while …
    n = ...
    u = ...
    Return (…)
```

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel *n*, $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.

2. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

Exercice 2 *5 points*

Partie I

On considère la fonction *h* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction *h* en 0.

2. Déterminer la limite de la fonction *h* en $+\infty$.

3. On note h' la fonction dérivée de *h*. Démontrer que, pour tout nombre réel *x* de $]0;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction *h* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions *f* et *g* définies sur $]0;+\infty[$ par :

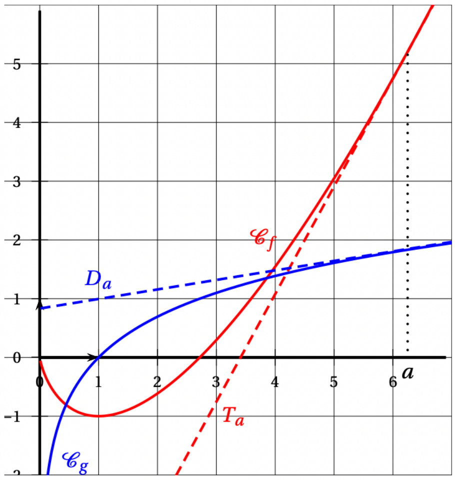
$$f(x) = x\ln x - x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln x$$

On note C_f et C_g les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à C_f en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à C_g en son point d'abscisse a.

Les courbes C_f et C_g ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$.

2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln a$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm'=-1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Exercice 3 *5 points*

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.
1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.

3. a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95. Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.
1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

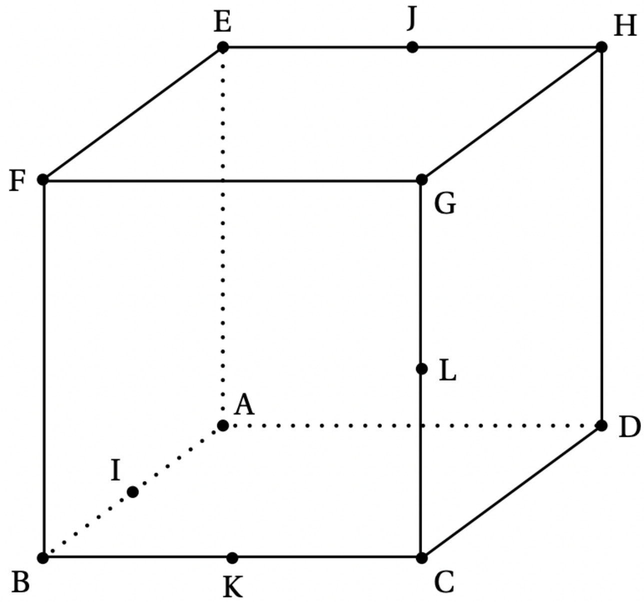
b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « Au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

Exercice 4 *5 points*

$ABCDEFGH$ est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$ A , J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK).
Déterminer les coordonnées du point M.

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?