<u>Durée</u> : 4h

Bac blanc de mathématiques n°1

Exercice 1 *4 points*

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les évènements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 2 *6 points*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \end{cases}$

Partie A

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 1$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de *n*.
En déduire que pour tout entier naturel *n*, $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

3. En déduire la limite de la suite (v_n).

Partie C

Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier *n* pour laquelle $u_n < 1{,}01$.

```
def seuil( ) :
 n = 0
 u = 5
while …….
 u = ...........
 n = ..........
return …..
```

Recopier et compléter ce programme sur la copie.

Exercice 3 *5 points*

Partie A

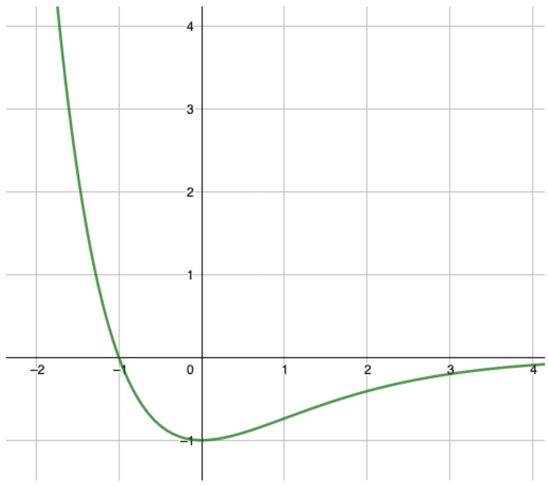
On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentant la dérivée f' de la fonction *f*.



Partie B

On admet que la fonction *f* mentionnée dans la Partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On note C la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On admet que la fonction *f* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de *f* respectivement.

1. Calculer la limite de *f* en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.

En déduire la limite de *f* en $+\infty$.

Justifier que la courbe C admet une asymptote que l'on précisera.

3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction *f* et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction *f*.

Que représente pour la courbe C son point A d'abscisse 0 ?

Exercice 4 *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n^2}$

a. converge vers 0 **b.** diverge vers $+\infty$

c. diverge vers $-\infty$ **d.** n'a pas de limite.

2. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{10}{2+e^x}$.
Sa courbe représentative dans un repère admet :

a. une seule asymptote horizontale ;
b. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;
c. deux asymptotes horizontales ;
d. deux asymptotes verticales.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.
La fonction dérivée de *f* est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ **b.** $f'(x) = (1-2x)e^{-x^2}$

c. $f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$ **d.** $f'(x) = (2-x^2)e^{-x^2}$

4. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
A chaque lancer il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a. $\dfrac{125}{3888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

5. Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges.
On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise.
Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 houles rouges ?

a. 0,1662 **b.** 0,4 **c.** 0,1115 **d.** 0,8886