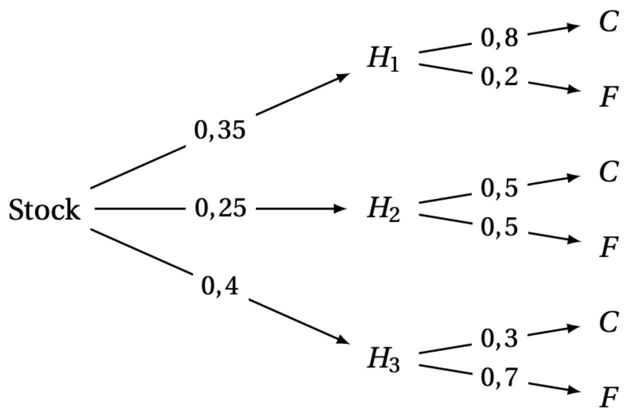
Bac blanc de mathématiques n°1 – Correction

Exercice 1

1. **a.** L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



   b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

   c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :
   $P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$
   $0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

   d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :
   $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$.

2. **a.** Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de 0,525 qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.

   b. La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc : $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5$ Finalement $P(X = 5) \approx 0,243$.

   c. Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leqslant 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$. On a alors :
   $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,984$.

Exercice 2

Partie A :

1. • Avec $n = 0$, $u_1 = 3 - \dfrac{10}{5+4} = 3 - \dfrac{10}{9} = \dfrac{27-10}{9} = \dfrac{17}{9}$;
   • Avec $n = 1$, $u_2 = 3 - \dfrac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \dfrac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \dfrac{90}{53} = \dfrac{159-90}{53} = \dfrac{69}{53}$.

2. Démonstration par récurrence ;
   Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 1$: la propriété est vraie au rang zéro ;
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.
   $u_n \geqslant 1 \Rightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Rightarrow \dfrac{1}{5} \geqslant \dfrac{1}{u_n+4} \Rightarrow \dfrac{10}{5} \geqslant \dfrac{10}{u_n+4} \Rightarrow -\dfrac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \iff$
   $3 - \dfrac{10}{u_n+4} \geqslant 3-2$, soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$: la propriété est héréditaire.
   La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle est vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \dfrac{10}{u_n+4} = \dfrac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 12 - 10}{u_n+4} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$.
   Le trinôme a deux racines évidentes 1 et -2 ; il se factorise donc en :
   $-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n+1)(u_n+2)$ et finalement :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. **a.** Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{3 - \dfrac{10}{u_n+4} - 1}{3 - \dfrac{10}{u_n+4} + 2} = \dfrac{2 - \dfrac{10}{u_n+4}}{5 - \dfrac{10}{u_n+4}} = \dfrac{\dfrac{2u_n+8-10}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+20-10}{u_n+4}} = \dfrac{\dfrac{2u_n-2}{u_n+4}}{\dfrac{5u_n+10}{u_+4}} = \dfrac{2u_n-2}{5u_n+10} = \dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \dfrac{2}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+2} = \dfrac{2}{5}v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$, vraie pour tout naturel n, démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{4}{7}$.

b. On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}4^n = \frac{4}{7} \times 0{,}4^n$.

Comme $\frac{4}{7} < 1$ et $0{,}4 < 1$ et par conséquent $0{,}4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.

2. On part de la définition :

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \iff v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \iff v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \iff$

$v_n u_n - u_n = -2v_n - 1 \iff u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \iff u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} \iff u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$

car $v_n \neq 1$.

3. $v_n = \frac{4}{7} \times 0{,}4^n$. On sait comme $0 < 0{,}4 < 1$ que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - v_n = 1$ et finalement

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Partie C :

```
def seuil( ) :
n = 0
u = 5
While u ≥ 0,01
u = 3 − 10/(u + 4)
n = n + 1
Return n
```

Exercice 3

Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. f semble croissante sur $]-\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$.

2. f semble concave sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{array}\right\}\text{donc }\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

2.

$f(x)=(x+2)\,e^{-x}$

$f(x)=xe^{-x}+2e^{-x}$.

$f(x)=\dfrac{x}{e^{x}}+2e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

C admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ en $-\infty$

3. a. $f'(x)=1\times e^{-x}-e^{-x}\times(x+2)$

$f'(x)=e^{-x}(1-x-2)$

$f'(x)=e^{-x}(-1-x)$

b. $e^{-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-1-x$

Posons $-1-x\geq 0$

$x\leq -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

4.

$f'(x)=-1\times e^{-x}-e^{-x}\times(-1-x)$

$f'(x)=xe^{-x}$

$e^{-x}>0$ donc $f''(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	
f		concave		convexe	

Le point A d'abscisse 0 est le point d'inflexion.

Exercice 4 *5 points*

1. a.

2. c.

3. c.

4. a.

5. c.