Interrogation de mathématiques n°2

Exercice 1 *3 points*

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x}{3+2x^2}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+e^{-2x+1}}$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1-x^2}{x-2}$

Exercice 2 *4 points*

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n{}^2 - 2u_n + 2$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. On admet que : $1 \le u_n \le 2$.

a. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$

b. Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. On admet que sa limite *l* vérifie l'équation $l = l^2 - 2l + 2$.
En déduire la valeur de *l*.

Exercice 3 *6 points*

Soit la fonction *f* définie pour tout réel $x \neq -1$ et $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$.

On appelle C_f sa courbe représentative.

1. Montrer que C_f coupe la droite d'équation $y = 1$ en un point dont on précisera les coordonnées.

2. a. Déterminer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x + 1$.

c. Déterminer les variations de la fonction *f* sur $]1;+\infty[$ (Ne pas construire le tableau de variations de *f*).

3. a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$. Interpréter le résultat.

b. On suppose que $x > 1$. Déterminer alors la limite de *f* en 1. Interpréter le résultat.

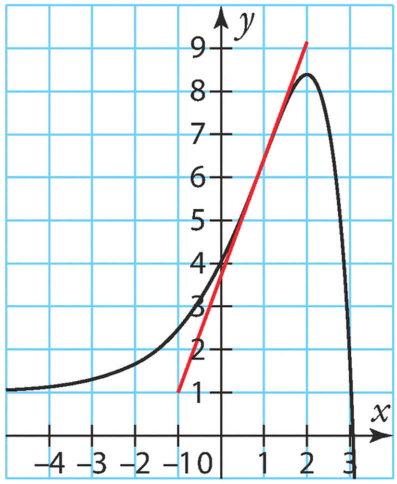
4. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $]1;+\infty[$.

5. Montrer que C_f ne peut avoir de tangente parallèle à la droite d'équation $y = -1$.

Exercice 4 *7 points*

On considère la fonction g définie par $g(x)=(3-x)e^x+1$. On appellera C_g sa courbe représentative.
On admet que g est deux fois dérivable de dérivée seconde g''.

Partie A : Lecture graphique



1. À l'aide du graphique ci-contre, déterminer les intervalles où g est convexe, et ceux où g est concave.

2. Conjecturer les coordonnées du point d'inflexion de C_g.

Partie B : Analyse

1. Montrer que $g'(x)=(2-x)e^x$ et $g''(x)=(1-x)e^x$.

2. a. Étudier le signe de $g''(x)$ et en déduire la convexité ou la concavité de g sur cet intervalle.

b. Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'inflexion de C_g.

3. Donner l'équation de la tangente T_1 à C_g au point d'abscisse $a=1$.

4. Soit h la fonction définie par $h(x)=(ex+e+1)-g(x)$.

a. Montrer que $h'(x)=(x-2)e^x+e$ puis que $h''(x)=-g''(x)$.

b. En déduire que $h'(x)$ est décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

c. Calculer $h'(1)$, en déduire que $h'(x)\geq 0$ sur $\mathbb{R}$, et donner le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$.

d. Calculer $h(1)$. En déduire le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e. Retrouver le résultat de la question B 2.