# Interrogation de mathématiques n°1 – bis

## Exercice 1 – 4 points

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$

Montrer par récurrence que $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 2 – 8 points

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75u_n(1-0{,}15u_n) \end{cases}$$

Où pour tout entier naturel *n*, $u_n$ désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

**1.** Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x)$.

**2.** Montrer que la fonction *f* est croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.

**3.** Résoudre dans l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**4. a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

**b.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**c.** Déterminer la limite *l* de la suite $(u_n)$.

**5.** Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

**a.** Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

**b.** Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous :

```
def menace()
  u = 0,6
  n = 0
  while u > 0,02
      u = 0,75*u*(1-0,15*u)
      n = n+1
  return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## Exercice 3 – 8 points

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2% des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.
On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où $u_n$ est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020+n$.

**1. a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

**b.** On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

**c.** Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

**2.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n \leq 12500$.

**3.** Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

**4.** En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

**5.** On définit la suite $\left(v_n\right)$ par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel *n*.

**a.** Démontrer que la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.

**b.** Exprimer, pour tout entier naturel *n*, $v_n$ en fonction de *n*. En déduire $u_n$ en fonction de *n*.

**c.** Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.