Interrogation de mathématiques n°1
Correction

Exercice 1

Initialisation

Pour $n=0$, $u_0=\dfrac{1}{0+1}=1$ donc vrai.

Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

montrons que $u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1+1}=\dfrac{1}{n+2}$

On a $u_n=\dfrac{1}{n+1}$.

Donc $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}}=\dfrac{1}{n+1}\times\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{1}{n+2}$.

Conclusion

$u_n=\dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2 – Polynésie Juin 21

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=0,95u_n+200.$$

1. • $u_1=0,95\times u_0+200=0,95\times 10000+200=9500+200=9700$.
   • $u_2=0,95\times u_1+200=0,95\times 9700+200=9215+200=9415$.
2. **a.** On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n>4000$.
   Initialisation : $u_0=10000>4000$: l'inégalité est vraie au rang 0;
   Hérédité : supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, on ait $u_n>4000$, alors par produit par $0,95>0$, on a $0,95u_n>0,95\times 4000$, soit :
   $0,95u_n>3800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :
   $0,95u_n+200>3800+200$, c'est-à-dire $u_{n+1}>4000$: la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n\in\mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n>4000$ quel que soit le naturel n.

   b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell\geqslant 4000$.
3. **a.** Pour $n=0$, on a $v_0=u_0-4000=10000-4000=6000$.

b. Au choix :

Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3800}{0,95}\right) =$
$0,95\,(u_n - 4000) = 0,95v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} =$
$\dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right)}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\,(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95.$

Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.
Or $v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$.

d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Exercice 3 – Sujet 1

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.
Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

b. La suite (u_n) semble croissante.

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité**

  On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

  $$n \leqslant u_n \leqslant n+1 \iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$$
  $$\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n$$
  $$\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4}$$
  $$\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$$

  donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.

  On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. D'après la question précédente :

- Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \dfrac{3}{4}(v_n + n) - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{3}{4}n - \dfrac{3}{4}n = \dfrac{3}{4}v_n$

$v_0 = u_0 - 0 = 1$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.