Correction de l'interro 5

exo 1

1b En effet $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$

D'où $\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$

2c En effet $u = x$ $\quad u' = 1$

$v = e^{x^2}$ $\quad v' = 2xe^{x^2}$

Donc $f'(x) = e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2}$

$= e^{x^2}(1 + 2x^2)$

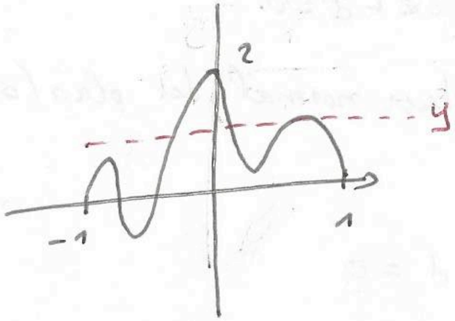
3c $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$= \lim \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$

or $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

4. c.



courbe contre exemple.

5. c

x	-4		0		2		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

a - b - d fausses d'après le tableau.

exo 2

1a. $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ $\quad J(2;0;1)$

b. $D(0;1;0)$ $\quad B(1;0;0)$ $\quad G(1;1;1)$

Donc $\vec{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

c. $\vec{DJ}\cdot\vec{BG} = 2\times 0 - 1\times 1 + 1\times 1$

$= 0$

$\vec{DJ}\cdot\vec{BI} = 2\times\left(\frac{-1}{2}\right) - 1\times 0 + 1\times 1$

$= -1 + 0 + 1$

$= 0$

Donc $\vec{DJ}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (BGI). $\vec{DJ}$ est donc un vecteur normal de ce plan

d. (BGI) : $ax+by+cz+d=0$

$\vec{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (BGI)

donc on a :

$$2x-y+z+d=0$$

or $B(1;0;0) \in (BGI)$ donc :

$$2\times1-0+0+d=0$$
$$d=-2$$

ccl : (BGI) : $2x-y+z-2=0$

2a. $d \perp (BGI)$ donc un vecteur directeur de d est $\vec{DJ}$.

De plus d passe par F donc :

$$(d) : \begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=1+t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

b. $$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=1+t \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$$

Donc $2(1+2t)-(-t)+1+t-2=0$

$$2+4t+t+1+t-2=0$$
$$6t+1=0 \qquad t=-\frac{1}{6}$$

Donc $x=1+2\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$

$$y=-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$$
$$z=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Donc $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ est le pt d'intersection de d et (BGI)

3. a. Volume $(FBGI)=\frac{1}{3}\times B\times h.$

$$B=\text{Aire}(FGI)=\frac{1}{2}\times FG\times FI=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$h=FB=1$$

Donc Volume $(FBGI)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{12}.$

b. Volume $(FBGI)=\frac{1}{3}\times B\times h$

$B=\text{Aire}(BGI)$

$$h=FL=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{6}-0\right)^2+\left(\frac{5}{6}-1\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}$$
$$=\sqrt{\frac{6}{36}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Donc $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\text{Aire}(BGI)\times\frac{1}{\sqrt{6}}$ donc $\text{Aire}(BGI)=\frac{\sqrt{6}}{12}\times3=\frac{\sqrt{6}}{4}$

exo3

partie I

1. $f'(\frac{1}{e})=0$ car c'est le coefficient directeur de la tangente T_A qui est horizontale.

$f'(1)=\frac{3-2}{0-1}=-1$ coef. dir de T_B

T_B: $y=-(x-1)+2$: $y=-x+3$

Partie II

1. $f(\frac{1}{e})=\frac{2+\ln(\frac{1}{e})}{\frac{1}{e}}$

$=\frac{2-\ln(e)}{\frac{1}{e}}$

$=\frac{2-1}{\frac{1}{e}}$

$=\frac{1}{\frac{1}{e}}$

$=e$

Donc $\mathcal{C}_f$ passe par $A(\frac{1}{e};e)$

$f(1)=\frac{2+\ln(1)}{1}$

$=\frac{2+0}{1}$

$=2$

Donc $\mathcal{C}_f$ passe par $B(1;2)$

Posons $f(x)=0$

$\frac{2+\ln x}{x}=0$

$2+\ln x=0$

$\ln x=-2$

$x=e^{-2}$

Donc $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un point unique de coordonnées $(e^{-2};0)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ } Par quotient de limites on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

$\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

Par somme de limites on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1(2+\ln x)}{x^2}$

$=\frac{1-2-\ln x}{x^2}$

$=\frac{-1-\ln x}{x^2}$

4. $x^2>0$ Donc $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln x$.

Posons $-1-\ln x\geqslant 0$

$-1\geqslant \ln x$

$e^{-1}\geqslant x$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. Posons $f''(x) \geqslant 0$

comme $x^3 > 0$ sur $]0;+\infty[$ alors :

$f''(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 1+2\ln x \geqslant 0$

$2\ln x \geqslant -1$

$\ln x \geqslant -\frac{1}{2}$

$x \geqslant e^{-\frac{1}{2}}$

Donc f est convexe sur l'intervalle $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$.