Interrogation de mathématiques n°4

Exercice 1 *6 points*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}$.

Partie A

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 1$.

3. Démontrer que, pour tout entier nature *n*, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 *5 points*

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Calculer la limite de f en 0. En donner une interprétation graphique.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En donner une interprétation graphique.

2. a. Montrer que, pour tout $x>0$: $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. a. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left]0;e^{\frac{-1}{2}}\right[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. On admet que, pour tout $x>0$: $f''(x)=\dfrac{6\ln x+1}{x^4}$.
Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ?

Exercice 3 *4 points*

On considère l'équation différentielle $(E): y'+y=e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+y=0$.

3. En remarquant que les solutions de (E) s'écrivent comme somme d'une solution particulière de (E) et de solutions générales de (E_0), déterminer toutes les solutions de (E).

4. Déterminer la fonction f solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 4 *5 points*

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.
On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question **1.b.**
Quel commentaire peut-on faire ?