Correction de l'interro 3

exo 1

(I) Pour $n=0$ $\quad u_0 = 14$

$9\times2^0+5 = 9\times1+5 = 14$. Donc vrai pour $n=0$

(H) Supposons qu'il existe un $n\in\mathbb{N}$ tq $u_n = 9\times2^n+5$.
mq $u_{n+1} = 9\times2^{n+1}+5$.

On a $\quad u_n = 9\times2^n+5$

$2u_n-5 = 2(9\times2^n+5)-5$

$u_{n+1} = 9\times2^{n+1}+10-5$

$u_{n+1} = 9\times2^{n+1}+5$. Donc vrai pour $n+1$

ccl: $u_n = 9\times2^n+5 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

exo 2

(A)

1\. (I) pour $n=0$ $\quad u_0 = 2 > 1$ vrai pour $n=0$

(H) Sup $\exists n\in\mathbb{N} / u_n>1$. mq $u_{n+1}>1$.

On a $u_n > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} = \frac{9-8+3u_n}{3+u_n}$

$= \frac{3(3+u_n)}{3+u_n} - \frac{8}{3+u_n}$

$= 3 - \frac{8}{3+u_n}$

Donc $3+u_n > 4$

$\frac{1}{3+u_n} < \frac{1}{4}$

$\frac{-8}{3+u_n} > -2$

$3 - \frac{8}{3+u_n} > 1$ Donc $u_{n+1} > 1$. $\quad$ ccl: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n > 1$

2a. $u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n$

$= \frac{1+3u_n - u_n(3+u_n)}{3+u_n}$

$= \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n}$

$= \frac{1-u_n^2}{3+u_n}$

$= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

b. On a $u_n > 1$ $\quad$ Donc $1+u_n > 0$

$3+u_n > 0$

et $1-u_n < 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$

(u_n) est donc décroissante

Comme $u_n > 1$, (u_n) est aussi minorée.

Donc (u_n) converge.

(B)

1\.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u	0,8	1,0769	0,9756	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	01

Il semble que (u_n) tende vers 1

2\. a. $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}$

$= \dfrac{\frac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} - 1}{\frac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} + 1}$

$= \dfrac{\frac{1+0{,}5u_n - 0{,}5 - u_n}{0{,}5+u_n}}{\frac{1+0{,}5u_n + 0{,}5 + u_n}{0{,}5+u_n}}$

$= \dfrac{\frac{0{,}5 - 0{,}5u_n}{0{,}5+u_n}}{\frac{1{,}5+1{,}5u_n}{0{,}5+u_n}}$

$= \dfrac{0{,}5(1-u_n)}{0{,}5+u_n} \times \dfrac{0{,}5+u_n}{1{,}5(1+u_n)}$

$= \dfrac{-0{,}5}{1{,}5} \cdot \dfrac{u_n - 1}{1+u_n}$

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{3} \cdot v_n$ Donc (v_n) géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$

b. $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

$v_n = v_0 \cdot q^n$

$v_n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

3a. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n < 1$ donc $v_n < 1$ car $\dfrac{1}{3} < 1$

Donc $v_n \neq 1$

b. $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

Donc $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 1$

$\Leftrightarrow v_n \cdot u_n - u_n = -1 - v_n$

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{-1 - v_n}{v_n - 1}$ Donc $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$.

exo 3

1 a. $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln[x(x+1)] = \ln 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x = 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 9$

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 < 0$ ne convient pas

$x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = \boxed{1}$

b. $\ln(x+1) = \ln\left(\dfrac{x+10}{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow x+1 = \dfrac{x+10}{x+2}$

on $(x+1)(x+2) = x+10$

$x^2 + 3x + 2 - x - 10 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Delta = 36$ $x_1 = -4$ ne convient pas

$x_2 = \boxed{2}$

2a. $X^2+X-6=0$

$\Delta = 1^2-4\times1\times(-6)$

$\Delta = 25$

$X_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2}$ $\quad$ $X_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2}$

$X_1 = \frac{-1-5}{2}$ $\quad$ $X_2 = \frac{-1+5}{2}$

$X_1 = -3$ $\quad$ $X_2 = 2$

b. $(\ln x)^2+\ln x-6=0$

Posons $X=\ln x$

On a $X^2+X-6=0$

Donc $X_1=-3$ ou $X_2=2$

$\ln x=-3$ ou $\ln x = 2$

$\boxed{x=e^{-3}}$ ou $\boxed{x=e^{2}}$

$e^{2x}+e^{x}-6=0 \iff (e^x)^2+e^x-6=0$

Posons $X=e^x$

On a $X^2+X-6=0$

Donc $X_1=-3$ ou $X_2=2$

$e^x=-3$ impossible $\quad$ $e^x=2$

$\boxed{x=\ln 2}$

Exo 4

A

1. $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2)=-2$

et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

$u'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$ car $x>0$

Donc u est croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	||	$+$	
u	||	$-\infty \nearrow +\infty$	

2a. u est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

De plus $0\in\mathbb{R}$

D'après le TVI l'éq. $u(x)=0$ admet 1 unique

solution $\alpha>0$

b. D'après la calculatrice $1,31<\alpha<1,32$

à 10^{-2} près.

3.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4. On a $u(\alpha)=0$

Donc $\alpha^2-2+\ln\alpha=0$

$\Leftrightarrow \quad \ln\alpha = 2-\alpha^2$

(B) 1. $f'(x) = 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2-\ln x)$

$= 2x - \frac{2}{x}(2-\ln x)$

$= \frac{2x^2-2(2-\ln x)}{x}$

$= \frac{2x^2-4+2\ln x}{x}$

$= \frac{2(x^2-2+\ln x)}{x}$

$= \frac{2u(x)}{x}$

2. Comme $2>0$ et $x>0$, alors $f'(x)$ est du signe de $u(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	