

Concours de l'Intendo 3.

exo 1

(I) Pour $n=0$ $u_0 = 14$

$$9 \times 2^0 + 5 = 9 \times 1 + 5 = 14. \text{ Donc vrai pour } n=0$$

(H) Supposons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tq $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

$$\text{alors } u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} + 5.$$

$$\text{On a } u_n = 9 \times 2^n + 5$$

$$2u_n - 5 = 2(9 \times 2^n + 5) - 5$$

$$u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} + 10 - 5$$

$$u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} + 5. \text{ Donc vrai pour } n+1$$

$$\text{cl: } u_n = 9 \times 2^n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

exo 2

a) 1. (I) pour $n=0$ $u_0 = 2 \geq 1$ vrai pour $n=0$

(H) Supposons que $\exists n \in \mathbb{N} / u_n \geq 1$. Alors $u_{n+1} \geq 1$.

$$\text{On a } u_n \geq 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n} = \frac{9-8+3u_n}{3+u_n}$$

$$\text{Donc } 3+u_n > 4$$

$$\frac{1}{3+u_n} < \frac{1}{4}$$

$$\frac{-8}{3+u_n} > -2$$

$$3 - \frac{8}{3+u_n} > 1 \quad \text{Donc } u_{n+1} > 1. \quad \text{cl: } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$$

$$\begin{aligned} 2a. \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n \\ &= \frac{1+3u_n - u_n(3+u_n)}{3+u_n} \\ &= \frac{1+3u_n - 3u_n - u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{1-u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} \end{aligned}$$

b. On a $u_n > 1$ Donc $1+u_n > 0$
 $3+u_n > 0$
et $1-u_n < 0$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n < 0$$

(u_n) est donc décroissante

Comme $u_n > 1$, (u_n) est aussi minorée.

Donc (u_n) converge.

B)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u	0,8	1,0719	0,9258	1,0083	0,99973	1,0009	0,99997	1,0001	0,999999

Il semble que (u_n) tende vers 1

$$\begin{aligned}
 2. a. v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\
 &= \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1} \\
 &= \frac{\frac{1+0,5u_n-0,5-u_n}{0,5+u_n}}{\frac{1+0,5u_n+0,5+u_n}{0,5+u_n}} \\
 &= \frac{0,5+0,5u_n}{0,5+u_n} \\
 &= \frac{0,5+0,5u_n}{1,5+0,5u_n} \\
 &= \frac{0,5(1-u_n)}{0,5+u_n} \times \frac{0,5+u_n}{1,5(1+u_n)} \\
 &= \frac{-0,5}{1,5} \cdot \frac{u_n-1}{1+u_n}
 \end{aligned}$$

$v_{n+1} = -\frac{1}{3} \cdot v_n$ donc (v_n) géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$

$$b. v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned}
 v_n &= v_0 \cdot q^n \\
 v_n &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

3a. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^n < 1$ donc $v_n < 1$ car $\frac{1}{3} < 1$

dmc $v_n \neq 1$

$$\begin{aligned}
 b. v_n &= \frac{u_n-1}{u_n+1} \\
 \text{dmc } v_n(u_n+1) &= u_n-1 \\
 \Leftrightarrow v_n u_n + v_n &= u_n - 1 \\
 \Leftrightarrow v_n \cdot u_n - u_n &= -1 - v_n \\
 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) &= -1 - v_n \\
 \Leftrightarrow u_n = \frac{-1-v_n}{v_n-1} \quad \text{dmc } u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}
 \end{aligned}$$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ car $-1 < -\frac{1}{3} < 1$

$$\text{dmc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

exo 3

$$\begin{aligned}
 1a. \ln(x) + \ln(x+1) &= \ln 2 \\
 \Leftrightarrow \ln[x(x+1)] &= \ln 2 \\
 \Leftrightarrow x^2+x &= 2 \\
 \Leftrightarrow x^2+x-2 &= 0 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 < 0 \text{ ne convient pas}$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = \boxed{1}$$

$$\begin{aligned}
 b. \ln(x+1) &= \ln\left(\frac{x+10}{x+2}\right) \quad \mid \quad \text{pm } (x+1)(x+2) = x+10 \\
 \Leftrightarrow x+1 &= \frac{x+10}{x+2} \quad \mid \quad x^2+3x+2 - x - 10 = 0 \\
 x^2+2x-8 &= 0 \\
 x &= 36 \quad x_1 = -4 \text{ ne convient pas} \\
 x_2 &= \boxed{2}
 \end{aligned}$$

$$2a. \quad x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6)$$

$$\Delta = 25$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + 5}{2}$$

$$x_2 = 2$$

$$b. \quad (\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$$

$$\text{Posons } X = \ln x$$

$$\text{On a } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{Dmc } x_1 = -3 \quad \text{ou} \quad x_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \ln x = -3 &\quad \text{ou} \quad \ln x = 2 \\ \boxed{x = e^{-3}} &\quad \text{ou} \quad \boxed{x = e^2} \end{aligned}$$

$$e^{2x} + e^x - 6 = 0 \quad (\Rightarrow (e^x)^2 + e^x - 6 = 0)$$

$$\text{Posons } X = e^x$$

$$\text{On a } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Dmc } x_1 = -3 &\quad \text{ou} \quad x_2 = 2 \\ e^x = -3 \text{ impossible} & \quad e^x = 2 \\ \boxed{x = \ln 2} \end{aligned}$$

exo 4

(A)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = -2$$

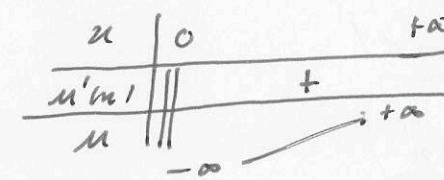
$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{x} \geq 0 \quad \text{car} \quad x > 0$$

Dmc u est croissante sur $[0, +\infty[$.



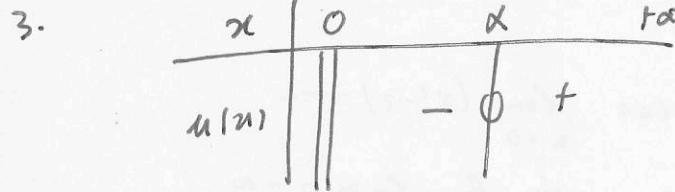
2a. u est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

De plus $0 \in \mathbb{R}$

D'après le TVI l'éq. $u(x) = 0$ admet 1 unique solution $x > 0$

b. D'après la calculatrice $1,31 < x < 1,32$

à 10^{-2} prè.



4. On a $u(\alpha) = 0$

$$\text{mc } \alpha^2 - 2 + \ln \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2$$

(B) $f'(x) = 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$

$$= 2x - \frac{2}{x}(2 - \ln x)$$

$$= \frac{2x^2 - 2(2 - \ln x)}{x}$$

$$= \frac{2x^2 - 4 + 2\ln x}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x}$$

$$= \frac{2u(u)}{x}$$

2. Comme $z > 0$ et $x > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $u(u)$.

