Interrogation de mathématiques n°2

Exercice 1 *3 points*

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x)=(3x^2+x)^5$ **2.** $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+x}$

On donnera des détails de calcul.

Exercice 2 *8 points*

On s'intéresse au nombre d'arbres dans une forêt.
En 2020, il y a 2500 arbres dans la forêt. Mais on prévoit que chaque année, 10 % des arbres soient coupés et 100 arbres soient replantés.
On note u_n le nombre d'arbres en $2020+n$.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=0{,}9u_n+100$.

3. a. Recopier et compléter ce programme en Python :

```
u = 2500
for i in range (…) :
      u = …
print (u)
```

Pour qu'il déterminer le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

4. a. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1000\leq u_{n+1}\leq u_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-1000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

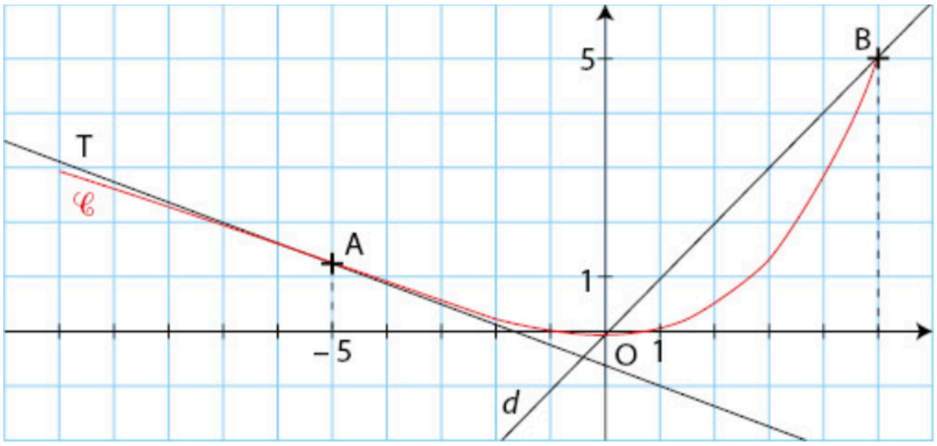
b. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de *n*.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

Exercice 3 *9 points*

Dans la figure ci-dessous sont représentés dans un repère orthogonal :

- La courbe C représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10;5]$;
- La tangente T à C au point A d'abscisse -5;
- La droite D d'équation $y = x$;



Partie A

Dans cette partie les estimations seront obtenues par lecture graphique.

Cette partie A est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Aucune justification n'est demandée.

1. Parmi les quatre valeurs ci-dessous, la meilleure valeur approchée du coefficient directeur de la tangente T est :

a. $-\dfrac{1}{3}$ **b.** -3 **c.** 3 **d.** $\dfrac{1}{3}$

2. La fonction f semble :

a. concave sur $[-5;0]$ **b.** concave sur $[-10;0]$

c. convexe sur $[-10;5]$ **d.** convexe sur $[-5;5]$

Partie B

La fonction f précédente, définie et dérivable sur l'intervalle $[-10;5]$, a pour expression $f(x) = (x-5)e^{0,2x} + 5$.

1. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-10;5]$.

a. Montrer que $f'(x) = 0,2xe^{0,2x}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10;5]$.

c. Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à C au point A d'abscisse -5.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$g(x) = 0,2x * \exp(0,2x)$ $\rightarrow g(x) = \frac{1}{5}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$
2	Dérivée $g'(x) = \frac{1}{25}x\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}$

a. En utilisant ces résultats, justifier que la dérivée seconde de *f*, notée f'', est définie par $f''(x) = (0,2 + 0,04x)e^{0,2x}$.

b. Étudier la convexité de la fonction *f* sur l'intervalle $[-10;5]$.