12 : Droites et systèmes

I. Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

1. Définition

Un système suivant de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

où a, b, c, a', b', c' sont des constantes, et $(x;y)$ le couple d'inconnues.

Résoudre un tel système revient à déterminer tous les couples solutions, c'est-à-dire tous les coupes vérifiant simultanément les deux équations du système.

2. Exemples

On considère le système $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 4x-3y+2=0 \end{cases}$

Le couple $(1;2)$ est solution du système.
En effet $2\times1+2-4=0$ et $4\times1-3\times2+2=0$

Il y a deux méthodes qui permettent de déterminer le couple solution d'un tel système.

II. Méthodes de résolution

1. Méthode par substitution

Exemple

Au café « Chez Jules », des professeurs de Maths et de Physique Chimie se retrouvent après les cours.
Ils commandent 2 cafés et 3 chocolats. Le serveur leur réclame 10,10€.
Puis quatre autres collègues arrivent et commandent 3 cafés et 1 chocolat. Cette fois-ci, le serveur leur réclame 7,10€.
Pour obtenir un partage équitable, déterminer le prix d'un café et d'un chocolat.
On notera x le prix d'un café et y celui d'un chocolat.
1. Donner l'équation qui traduit le total de 10,10€.

2. De même, donner l'équation qui traduit le total de 7,10€.

3. Vérifier qu'on obtient le système $\begin{cases} 2x+3y-10,1=0 \\ 3x+y-7,1=0 \end{cases}$.

4. Dans la deuxième équation, isoler l'inconnue y pour l'exprimer en fonction de l'inconnue x.

5. Dans la première équation, remplacer l'inconnue y par le résultat de la question précédente.

Ainsi, on obtient une nouvelle équation dans laquelle il n'y a plus qu'une inconnue x.

6. Résoudre cette dernière équation pour trouver la valeur de x.

7. Remplacer alors cette valeur dans l'équation de la question 4. pour trouver la valeur de y.

8. Rédiger une conclusion au problème proposé.

Résumé

Cette méthode consiste à :

- Isoler une inconnue à partir d'une équation ;
- Remplacer cette inconnue dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue ;
- Résoudre alors cette nouvelle équation ;
- Remplacer l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

2. Méthode par combinaison

Exemple

On cherche à étudier le point d'intersection, s'il existe, des droites suivantes :

- d_1 d'équation cartésienne $4x+3y-9=0$ et
- d_2 d'équation cartésienne $7x+2y-19=0$.

1. Représenter ces deux droites à l'aide de la calculatrice.

2. Graphiquement, quelles semblent être les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ?

3. Vérifier par le calcul si ce point appartient à l'une des deux droites ou bien au deux.
Le point d'intersection a des coordonnées $(x;y)$ qui vérifient donc les deux équations en même temps, on dit qu'elles sont solutions du système que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} 4x+3y-9=0 \\ 7x+2y-19=0 \end{cases}$$

4. Mon professeur propose de transformer ce système sous la forme :

$$\begin{cases} 28x+21y-63=0 \\ -28x-8y+76=0 \end{cases}$$

a. Quelles opérations a-t-il effectuées ? Quels avantages y voyez-vous ?

b. En déduire alors la valeur de y.

c. Remplacer cette valeur dans les deux équations pour vérifier que vous obtenez la même valeur de x. Donner alors les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

5. Essayer d'effectuer des opérations sur les équations pour éliminer y en partant du système de départ. Retrouver alors le résultat.

Résumé

Cette méthode consiste à :

- Multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant ou en soustrayant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine.
- Résoudre l'équation à une seule inconnue.
- Remplacer l'inconnue trouvée dans une équation afin de trouver la seconde inconnue.

Exercice 1

Résoudre par la méthode la plus adaptée, chacun des systèmes :

$$(S) : \begin{cases} x - 3y = -1 \\ -3x + 4y = -2 \end{cases} \qquad (S') : \begin{cases} 3x + 5y = -6 \\ 7x + 3y = 12 \end{cases}$$

Exercice 2

Bernard a travaillé durant l'été pendant 45 jours dans deux entreprises.
Dans la première, il a gagné 85 € par jour et dans la deuxième, 72 € par jour.
Au total, il a gagné 3487 €.
Combien de jours a-t-il travaillé dans chaque entreprise ?

III. Interprétation graphique : Intersection de droites

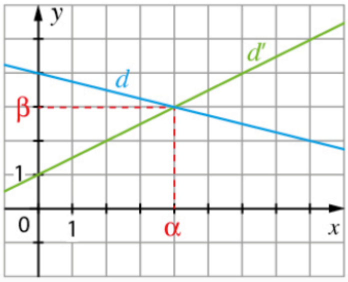
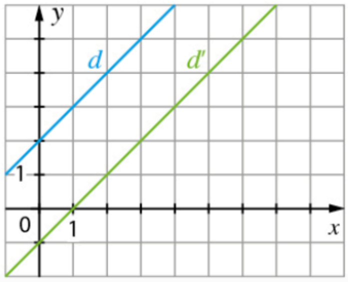
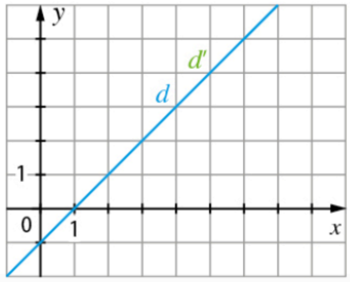
1. Définition

Deux droites non parallèles sont dites sécantes.

Propriété

Résoudre le système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ revient à déterminer, s'il existe, le point d'intersection de coordonnées $(x;y)$ des droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

3 cas sont possibles :

d et d' sont **sécantes**. Le système admet une **unique** solution : le couple $(\alpha\,;\beta)$.	d et d' sont **strictement parallèles**. Le système n'admet **aucune** solution.	d et d' sont **confondues**. Le système admet une **infinité** de solutions.
		

Exercice 3

1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x+4y=3 \end{cases} \qquad (S_2):\begin{cases} 4x-3y=5 \\ -8x+6y=-10 \end{cases}$$

2. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 4

On considère les droites d et d' d'équations respectives $-5x+7y+31=0$ et $x+2y+4=0$.

1. Déterminer les coefficients directeurs de ces 2 droites. Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 5

On considère les droites d et d' d'équations respectives $-2x+y+1=0$ et $6x-3y+a=0$.

1. Déterminer les coefficients directeurs de ces 2 droites. Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer la valeur de a pour le système $(S):\begin{cases} -2x+y+1=0 \\ 6x-3y+a=0 \end{cases}$ ait eu infinité de solutions.