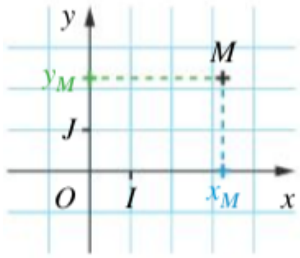
10 : Géométrie plane dans un repère

I. Calculs dans un repère orthonormé

1. Repère orthonormé

Définition

Un repère du plan, défini par trois points non alignés *O*, *I* et *J* est orthonormé lorsque le triangle *OIJ* est rectangle isocèle en *O*.
Le point *O* est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses et la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.
On a $OI = OJ = 1$ unité.



Remarque

- Le repère (O, I, J) se note également $(O;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ou encore $(O;\vec{i}, \vec{j})$ en posant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
- Dans un repère, tout point *M* est repéré par un unique couple de réels $(x; y)$ appelé coordonnées. On note $M(x; y)$, *x* est l'abscisse et *y* l'ordonnée du point *M*.

2. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

On considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ du plan.
Le milieu *K* du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Exemple

Soit $A(2;-5)$ et $B(6;3)$. le milieu *K* du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$x_K = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ et } y_K = \frac{-5+3}{2} = -1$$

On a donc $K(4;-1)$.

Application 1

Soit $R(3;-2)$ et $T(3;-3)$.
1. Déterminer les coordonnées de A milieu du segment $[RT]$.
2. Déterminer les coordonnées de B tel que T soit le milieu du segment $[BR]$.

2. Distance entre deux points

Propriété

On considère deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ du plan.
La distance AB est : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Exemple

Soit $A(3;-4)$ et $B(-1;-1)$ deux points du plan.
La distance AB est :
$AB=\sqrt{(-1-3)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

Exercice 1

Soit $A(-1;2)$, $B(4;3)$ et $C(5;-2)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

II. Coordonnées d'un vecteur et colinéarité

1. Coordonnées d'un vecteur

Propriété

- Pour tout point $M(x;y)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on a : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

  On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, il existe un unique couple de réels $(x;y)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et k un réel.

- $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Remarque

Le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ b+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2a-1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels *a* et *b* tel que $3\vec{u}=-\vec{v}$.

Propriété

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A\left(-5;2\right)$, $B\left(-3;1\right)$, $C\left(0;5\right)$ et $D\left(2;4\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer les coordonnées du point *E* tel que *ABCE* soit un parallélogramme.
3. Montrer que *C* est le milieu de $\left[ED\right]$.
4. Déterminer les coordonnées des points *F*, *G* et *H* tels que :
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BG}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{ED}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}$

2. Norme d'un vecteur

Propriété

La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notée $\|\vec{u}\|$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice 4

Dans un repère orthonormé du plan (O, I, J) considère les points : $A(-5;-5)$, $B(-2;-3)$ et $C(3;-1)$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées des milieux I et J respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$.
2. Le triangle ABC est-il rectangle ?
3. Démontrer de deux façons différentes que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

3. Critère de colinéarité

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées ssi $\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

Exercice 5

On considère les vecteurs $\vec{u}(-6;3)$, $\vec{v}(2;-1)$ et $\vec{w}(4;2)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

Exercice 6

Soit les points $A(-1;1)$, $B(3;2)$, $C(-2;-3)$ et $D(6;-1)$.

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 7

Soit les points $B(3;2)$, $D(6;-1)$ et $E(5;0)$.

Démontrer que les points *B*, *D* et *E* sont alignés.

Exercice 8

1. Déterminer la valeur de *x* pour laquelle les vecteurs $\vec{u}(2;5)$ et $\vec{v}(x;3)$ sont colinéaires.

2. Même question avec $\vec{u}(x;2)$ et $\vec{v}(3;x+1)$.

Exercice 9

On donne les points $E(-1;-2)$, $F(3;-4)$ et $G(4;7)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$.

2. En déduire les coordonnées du point *H* tel que *EFHG* soit un parallélogramme.