02 : Calcul littéral

I. Manipulations algébriques

1. Différentes formes d'une expression algébrique

Une expression littérale est une écriture contenant une lettre qui désigne un nombre quelconque.
Cette lettre est généralement appelée inconnue dans une équation (ou une inéquation) ou variable lorsque l'on cherche l'évolution d'une quantité.
Une expression littérale peut s'écrire sous différentes formes : Développée ou factorisée.

Exemples

On donne l'expression $A=(x-1)(x+2)$. C'est une forme factorisée car c'est un produit de facteurs.
On peut aussi écrire $A=x^2+x-2$. C'est une forme développée car c'est une somme de termes.

Définition

On appelle identité une égalité qui est vraie quelles que soient les valeurs données aux différentes lettres qui interviennent.

Exemple

$x^2-3x=x(x-3)$ est une identité car cette égalité reste vraie pour toute valeur de *x*.

2. Distributivité

Propriété

Pour tous nombres *a*, *b*, *c*, *d* et *k* on a les identités suivantes :
$k(a+b)=ka+kb$
$k(a-b)=ka-kb$
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

Exemples

$B=2x(3x-1)-4(3-x)$
$B=6x^2-2x-12+4x$
$B=6x^2+2x-12$

$C=2x-(x+2)(3-x)$
$C=2x-\left[3x-x^2+6-2x\right]$
$C=2x-\left[-x^2+x+6\right]$
$C=2x+x^2-x-6$
$C=x^2+x-6$

3. Identités remarquables

Propriété

Pour tous nombres a et b on a les identités suivantes :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemples

$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$(5-2x)^2 = 5^2 - 2\times 5\times 2x + (2x)^2 = 25 - 20x + 4x^2$

$(3+2x)(3-2x) = 3^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2$

4. Factorisation

Pour factoriser, il faut :

- Repérer un facteur commun :
  $$\begin{aligned}(x+2)(2x-3)-4(x+1)(x+2) &= (x+2)\left[(2x-3)-4(x+1)\right]\\ &= (x+2)\left[2x-3-4x-4\right]\\ &= (x+2)(-2x-7)\end{aligned}$$
- Reconnaître une identité remarquable :
  $$\begin{aligned}25x^2-40x+16 &= (5x)^2 - 2\times 5x \times 4 + 4^2\\ &= (5x-4)^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}49x^2-81 &= (7x)^2-9^2\\ &= (7x+9)(7x-9)\end{aligned}$$

Exercice 1
Factoriser les expressions suivantes :

$A = 3x^2 - 6x$	$B = (2x+1)(x-5) - 5x(2x+1)$
$C = (2x+1)^2 - (3-x)(2x+1)$	$D = (3x+1)(1-2x) + (1-2x)$
$E = 4x^2 - 24x + 36$	$F = 9 - 25x^2$
$G = (2x-5)^2 - (3x+1)^2$	$H = 4x^2 - 1 - (5x-2)(2x+1)$

5. Calculs sur les quotients

Propriété 1

Pour tous réels a, b et k, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$, on a :

$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Propriété 2

Pour tous réels a, b, c et d, avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on a :

$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$ $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$ $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$

Propriété 3

Pour tous réels a, b, c et d, avec b, c et d non nuls, on a :

- L'inverse de $\frac{b}{d}$ est $\frac{d}{b}$
- $\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$

Exemples

- $\frac{3}{x} - \frac{2-x}{2x+1} = \frac{3(2x+1)}{x(2x+1)} - \frac{(2-x)x}{x(2x+1)} = \frac{3(2x+1)-(2-x)x}{x(2x+1)} = \frac{6x+3-2x+x^2}{x(2x+1)} = \frac{x^2+4x+3}{x(2x+1)}$

  0 et $-\frac{1}{2}$ sont des valeurs interdites car elles annulent les dénominateurs.

- $\frac{4}{5x^2} \div \frac{6}{15x} = \frac{4}{5x^2} \times \frac{15x}{6} = \frac{2 \times 2 \times 5 \times 3x}{5 \times x \times x \times 3 \times 2} = \frac{2}{x}$

Exercice 2

Écrire $A = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}$ sans racine au dénominateur.

Méthode : on multiplie par l'expression conjuguée du dénominateur le numérateur et le dénominateur de la fraction.

$$A = \frac{-2}{1+\sqrt{3}} = \frac{-2\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$$

Faire de même avec $B = \frac{-2}{2-\sqrt{6}}$ et $C = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

II. Comparaison de deux quantités

1. Signe et comparaison de deux nombres

Définition

Étant donnés a et b deux nombres réels.
On dit que a est strictement supérieur à b et on note $a > b$, lorsque $a - b > 0$.
Ainsi $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Remarque

Comparer deux nombres, c'est déterminer s'ils sont égaux et sinon, c'est déterminer lequel est le plus grand des deux.

2. Critères de comparaison de deux nombres

Propriété

Pour comparer les nombres a et b, on peut utiliser deux critères.

- **Critère de la différence**
  On étudie le signe de la différence $a - b$.
  Si $a - b < 0$ alors $a < b$. Si $a - b > 0$ alors $a > b$.

- **Critère du quotient** avec a et b sont strictement positifs
  Si $\frac{a}{b} < 1$ alors $a < b$. Si $\frac{a}{b} > 1$ alors $a > b$.

Exemple

On veut comparer $A = (x+1)(x-2)$ et $B = -x - 2$

$$\begin{aligned} A - B &= (x+1)(x-2) - (-x-2) \\ &= x^2 - 2x + x - 2 + x + 2 \\ &= x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $A - B \geq 0$ autrement dit $A \geq B$.

Application

Sachant que $x < 0$, comparer $A = (3x+4)^2$ et $B = 9x^2 + 16$

Exercice 3

Dans chaque cas, comparer les nombres A et B.

1. $A = ab + 4$ et $B = (a+2)(b+2)$ sachant que a et b sont deux réels négatifs.

2. $A = \dfrac{3}{n}$ et $B = \dfrac{9}{n^2}$ sachant que $n \geq 3$.

3. $A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ et $B = 2$, avec a et b deux nombres de même signe.

Exercice 4

1. Comparer, pour tout réel $x > 2$, les nombres $A = \dfrac{x}{x-2}$ et $B = \dfrac{x+1}{x-1}$

2. En déduire la comparaison des nombres $\dfrac{1000}{998}$ et $\dfrac{1001}{999}$.

III. Résolution algébrique d'équations

1. Équations équivalentes et opérations

Définition

- Une équation d'inconnue x est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu x. Résoudre dans un ensemble E une telle équation, c'est déterminer toutes les valeurs de x appartenant à E qui rendent l'égalité vraie. Ces valeurs sont les solutions dans E de l'équation.
- On dit que deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes solutions.

Propriété

Les manipulations algébriques suivantes transforment une équation en une équation équivalente.

- Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres d'une équation.
- Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une équation par un même nombre non nul.
- Développer, factoriser, réduire l'un des deux membres de l'équation.

Exemple

L'équation $(E) : x^2 - x - 6 = 0$ admet -2 et 3 comme solutions.

L'équation $(E') : 2x - 3 = x - 5$ admet -2 comme solution.

Ces deux équations ne sont pas équivalentes.

2. Application : équations du premier degré

Pour résoudre une équation du 1er degré, on isole l'inconnue en utilisant les propriétés d'équivalences.

Exemple

$2x-1=-3x+1$
$\Leftrightarrow 2x+3x=14+1$
$\Leftrightarrow 5x=15$
$\Leftrightarrow x=3$
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation est $S=\{3\}$.

3. Équation produit – Équation quotient

Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
Autrement dit :

$$A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ ou } B(x)=0$$

Règle du quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.
Autrement dit :

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ avec } B(x)\neq 0$$

Les valeurs de x qui annulent le dénominateur sont appelées valeurs interdites du quotient.

Exemples

$(2x-1)(3-x)=0$

Soit $2x-1=0$
$\Leftrightarrow 2x=1$
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Soit $3-x=0$
$\Leftrightarrow -x=3$
$\Leftrightarrow x=-3$

Les solutions sont $S=\left\{-3;-\frac{1}{2}\right\}$

$\frac{2x+4}{1-x}=0$

Posons $1-x=0$
$\Leftrightarrow x=1$
Donc 1 est une valeur interdite.

Posons $2x+4=0$
$\Leftrightarrow 2x=-4$
$\Leftrightarrow x=-2$

La solution est $S=\{-2\}$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(6-2x)(2x+3)(x-9)=0$

2. $\dfrac{(2-3x)(x-4)}{2x+3}=0$

3. $(3x-1)(5-2x)=(x+1)(5-2x)$

4. $\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{3-2x}{1-x}$

5. $\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$

6. $1-\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{2}{2-x}$

7. $x^2-25=(2x+1)(x+5)$