01 : Ensembles et nombres réels

Exercice 1

Déterminer la nature de chaque nombre :

1. $\dfrac{11}{50}$ **2.** $\dfrac{85}{1500}$ **3.** $\pi^2 - 1$ **4.** $1-\sqrt{49}$

5. $1+\sqrt{5}$ **6.** $\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$ **7.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Exercice 2

Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x puis écrire cet ensemble à l'aide d'intervalles.

1. $x \geq 3$ **2.** $-2 \leq x < 4$ **3.** $x \in \mathbb{R}^*$ **4.** $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1;1\right\}$

Exercice 3

1. Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient le nombre réel x, puis traduire sans la notation valeur absolue.

a. $\left|x-4\right| = 2$ **b.** $\left|x+5\right| < 3$ **c.** $\left|x+2\right| \geq 4$ **d.** $\left|x-2\right| \leq -1$

2. Utiliser la notation valeur absolue pour traduire l'appartenance du nombre réel x à l'ensemble donné :

a. $x \in \left]-2;5\right[$ **b.** $x \in \left]-\infty;-3\right] \cup \left[1;+\infty\right[$

Exercice 4

Déterminer la forme rationnelle des nombres suivants :

1. 2,555... **2.** 11,4646... **3.** 32,1321321...

Exercice 5

1. Simplifier les nombres suivants, où a et b sont deux réels non nuls :

$A = \left(a^{-5}\right)^3$ $B = \left(a^3\right)^3 \times a^{-6}$ $C = b^{-5}a^4\left(ab\right)^3$

$D = \left(\left(a^2\right)^3\right)^4 \times a^{-24}$ $E = \left(\dfrac{2^4 \times 3^5 \times 5^3}{6}\right)^3$ $F = \dfrac{2^7 \times 10^{-5} \times 3^{10}}{10^{-9} \times 2^5 \times 9^4}$

2. Simplifier les nombres suivants :

$M = \sqrt{98}$ $N = \sqrt{8} \times \sqrt{50}$ $P = \sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}$ $Q = \sqrt{\dfrac{35}{3}} \times \sqrt{\dfrac{21}{5}}$

3. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les nombres suivants :

$G = -2\sqrt{52} + 5\sqrt{26} \times \sqrt{2} - 3\sqrt{208}$ $H = \dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{18}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{18}}$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $|x| = 2$ **b.** $|-x| = 3$ **c.** $|x| = -1$

d. $|x-2| = 3$ **e.** $|x+5| = 5$ **f.** $|1-x| = 3$

Exercice 7

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. En déduire la valeur de la somme S définie par :

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{2020\times 2021}.$$

Exercice 8

On considère l'algorithme de la fonction nombre ci-dessous qui prend comme argument un nombre a et renvoie le nombre e :

```
Fonction nombre(a)
    b prend la valeur de a².
    c prend la valeur la valeur a-b
    d prend la valeur 2c
    e prend la valeur d − c + b.
    Renvoyer e
Fin
```

Préciser le plus petit ensemble auquel appartient $\text{nombre}(a)$ pour les arguments a suivants :

2 ? -4 ? $\sqrt{2}$?

Exercice 9

On considère le scripte suivant :

```python
def quisuisje(x):
    if x<=-1 :
        a=2*x-1
    elif x<4 :
        a=x/3
    else :
        a=x**2-3
    return a
```

Quel est le plus petit ensemble auquel appartient quisuisje(x) Lorsque l'on saisit les arguments : -2 ? $\sqrt{2}$? $3\sqrt{2}$? $\dfrac{3}{2}$?

Exercice 10

Le nombre d'or, noté φ (lire « phi »), est présent dans l'art mais aussi dans la nature. Il est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Donner l'arrondi au millième de φ.

2. Démontrer que le nombre d'or vérifie l'égalité $x^2 = 1 + x$.

3. Expliquer pourquoi $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.