98 PYTHON

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction polynôme P définie pour tout réel x par $P(x)=2x^3-3x^2-1$.

1. Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$.

2. a. Calculer $P(1)$ et $P(2)$. On peut alors en déduire et on l'admet ici que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution réelle α et que cette solution appartient à l'intervalle $]1;2[$.

b. On considère la fonction encadrement suivante. Cette fonction retourne un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Langage naturel

Fonction encadrement() :
  $x \leftarrow 1$
  Tant que $P(x)<0$ Faire
    $x \leftarrow x+0{,}1$
  Fin Tant que
  Retourner $x-0{,}1$ et x
Fin Fonction

Python

```python
def P(x):
    return 2*x**3-3*x**2-1

def encadrement():
    x=1
    while P(x)<0:
        x=x+0.1
    return x-0.1,x
```

Quelles valeurs retourne cette fonction lorsqu'on l'exécute ?

c. Modifier cette fonction afin qu'elle :

① prenne en argument un entier naturel $n\geqslant 1$;

② retourne en sortie un encadrement de α d'amplitude 10^{-n}.

3. Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Étude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel $x>-1$:

$$f'(x)=\frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$$

où P est la fonction étudiée dans la **partie A.**

2. En utilisant le résultat de la question **A.3.**, étudier les variations de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

Partie C. Positions relatives

1. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

2. Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et T sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

78 Une agence de voyages propose trois types de transport pour se rendre à la cérémonie d'ouverture des Jeux olympiques : l'avion, le train ou le car. À chaque client qui achète un billet de transport, l'agence propose une assurance multirisques qui permet une indemnisation en cas de retard ou de vol de bagages. Une enquête montre que 55 % des clients choisissent l'avion, 40 % des clients préfèrent le train. Les autres choisissent le car. De plus, parmi les clients ayant choisi l'avion, 20 % ont souscrit l'assurance multirisques. Ils sont 8 % parmi ceux qui ont choisi le voyage en train et seulement 4 % parmi ceux qui ont choisi le car.

On prend au hasard le dossier d'un client qui se rend à la cérémonie d'ouverture. On note respectivement A, T, C et S les événements « le client a acheté un billet d'avion », « le client a acheté un billet de train », « le client a acheté un billet de car » et « le client a souscrit une assurance multirisques ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité que le dossier choisi soit celui d'un client qui voyagera en train et qui a souscrit une assurance multirisques.

3. Montrer que la probabilité de S est égale à 0,144.

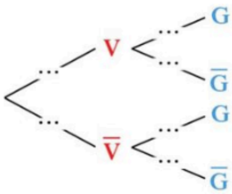
4. On choisit le dossier d'un client qui a souscrit une assurance multirisques. Calculer la probabilité, arrondie au millième, que ce client voyage en train.

84 Une étude montre que 40 % de la population d'une ville est vaccinée contre la grippe. Toutefois, 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe. À la fin de l'épidémie, on apprend que 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard.
On note V « la personne est vaccinée » et G « la personne a contracté la grippe ».

1. Donner la probabilité de l'événement G.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

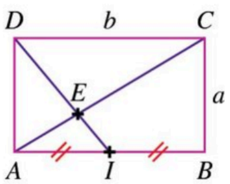


3. Calculer la probabilité que la personne ait contracté la grippe et soit vaccinée.

4. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer la probabilité de $\overline{V} \cap G$.

5. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

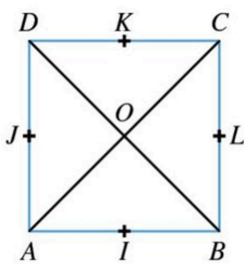
83 LOGIQUE Soit $ABCD$ un rectangle. I est le milieu de $[AB]$. Les droites (DI) et (AC) se coupent en E. On note $BC = a$ et $CD = b$.



1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a et b.

2. En déduire que (DI) est perpendiculaire à (AC) si et seulement si $b = a\sqrt{2}$.

63 $ABCD$ est un carré de centre O et de côté 2. Les points I, J, K et L sont les milieux des côtés du carré $ABCD$. Déterminer les produits scalaires suivants.

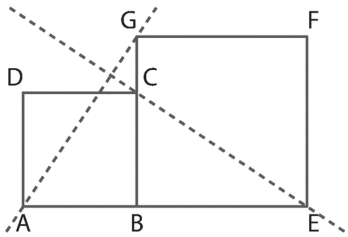


1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{AC}$

3. $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{BD}$ **4.** $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{LJ}$

5. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI}$ **6.** $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{LD}$

73 On considère deux carrés ABCD et BEFG disposés comme sur la figure ci-contre tel que AB = 1 et BE = a.



A. Avec coordonnées

1. Dans le repère (A ; B, D), donner les coordonnées de tous les points de la figure.

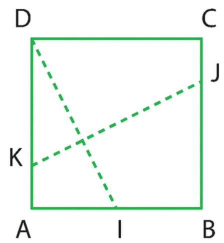
2. Démontrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

B. Sans coordonnées

1. Développer le produit scalaire $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE})$.

2. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ puis que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

72 Dans un carré ABCD de côté 6, on construit le milieu I du segment [AB] et les points J et K tels que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

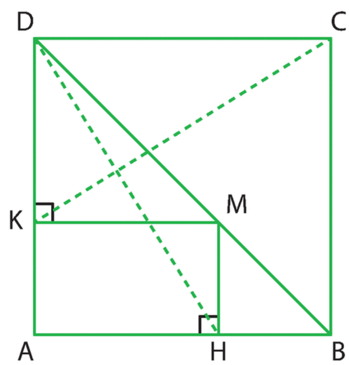


1. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DA}$.

2. En déduire que les droites (DI) et (JK) sont perpendiculaires.

107 **Perdu dans un carré**

On considère un carré ABCD de côté 1 et un point M quelconque sur le segment [BD]. On construit les projetés orthogonaux H et K du point M respectivement sur les côtés [AB] et [AD].



1. On veut démontrer que les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires par deux méthodes :

a) On utilisera le repère (A ; B, D) et on notera $(x ; y)$ les coordonnées du point M.

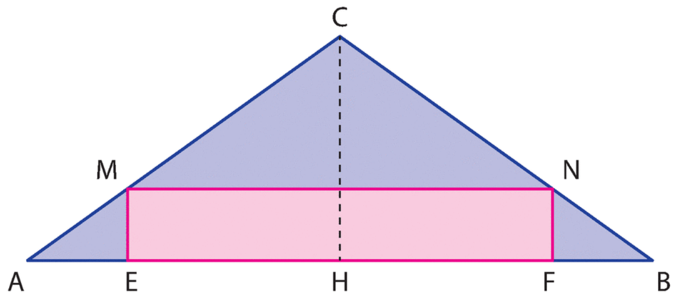
b) On calculera le produit scalaire : $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{DH}$ en décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.

2. Démontrer que les longueurs CK et DH sont égales :

a) avec des coordonnées.

b) sans coordonnées.

87 On veut inscrire un rectangle d'aire maximale dans un triangle ABC isocèle en C de dimensions AC = BC = 5 et AB = 8. Pour cela on place un point E sur le segment [AB] à une distance x du point A, puis à partir de E on construit les trois autres points, M sur [AC], N sur [BC] et F sur [AB], pour former le rectangle EMNF comme sur la figure ci-contre. L'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle EMNF varie ainsi en fonction de la position x du point E sur le segment [AB].



1. Expliquer pourquoi x appartient à l'intervalle [0 ; 4].
2. Combien mesure la hauteur [HC] du triangle ABC ?
3. Montrer à l'aide du théorème de Thalès que ME $= \frac{3x}{4}$, et en déduire que, quel que soit le réel x de l'intervalle [0 ; 4], $\mathscr{A}(x) = 6x - \frac{3}{2}x$.
4. En déduire la position de E sur [AB] pour que l'aire du rectangle soit maximale et la valeur de cette aire maximale.

84 Une entreprise fabrique et vend x tonnes d'un certain produit par jour, x étant compris entre 10 et 100. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en centaines d'euros est donné par $C(x) = 0{,}2x^2 + 8x + 500$.

Partie A

Le coût moyen unitaire C_M de fabrication d'une tonne de produit est exprimé en centaines d'euros et est égal, pour tout réel x de l'intervalle $I = [10 ; 100]$ à :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Justifier que la fonction C_m est dérivable sur I, et que pour tout réel x de I, $C_m'(x) = \frac{0{,}2x^2 - 500}{x^2}$.

2. En déduire la quantité de produit fabriqué quotidiennement pour laquelle le coût moyen unitaire est minimale.

84 Une entreprise fabrique et vend x tonnes d'un certain produit par jour, x étant compris entre 10 et 100. Elle doit assumer des charges représentant un coût total quotidien dont le montant en centaines d'euros est donné par $C(x) = 0{,}2x^2 + 8x + 500$.

Partie A

Le coût moyen unitaire C_M de fabrication d'une tonne de produit est exprimé en centaines d'euros et est égal, pour tout réel x de l'intervalle $I = [10 ; 100]$ à :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Justifier que la fonction C_m est dérivable sur I, et que pour tout réel x de I, $C'_m(x) = \dfrac{0{,}2x^2 - 500}{x^2}$.

2. En déduire la quantité de produit fabriqué quotidiennement pour laquelle le coût moyen unitaire est minimale.

Partie B

1. Le prix de vente d'une tonne de produit dépend de la quantité x produite et s'exprime, en centaines d'euros, par la relation : $p(x) = 62 - \dfrac{x}{4}$.

a) Déterminer la recette totale obtenue avec une production et une vente de 40 tonnes de produit.

b) Déterminer en fonction de la quantité x produite et vendue le montant de la recette totale $R(x)$.

2. Le bénéfice B, en centaines d'euros, réalisé par l'entreprise pour la vente de x tonnes de produit est égal, pour tout réel x de I, à : $B(x) = R(x) - C(x)$.

a) Montrer qu'alors B est la fonction définie sur I par $B(x) = -0{,}45x^2 + 54x - 500$.

b) Combien de tonnes l'entreprise doit produire et vendre afin d'obtenir un bénéfice maximum ? Donner le montant de ce bénéfice.

D'après bac

90 **Variations d'une fonction et étude des positions relatives de deux courbes**

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathrm{I} = [-2 ; 2]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1 \text{ et } g(x) = x + 2$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère. Soit d la fonction définie sur I par $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. Déterminer l'expression de $d(x)$ en fonction de x, puis calculer sa dérivée.

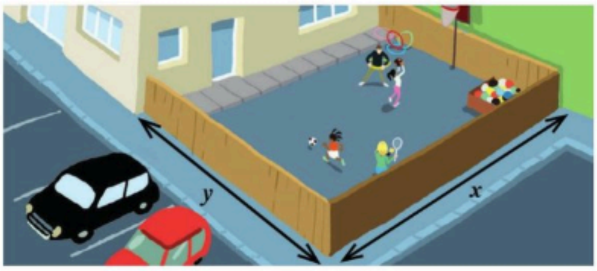
2. Étudier les variations de d sur I.

3. a. Préciser $d(1)$ et déterminer le signe de $d(x)$ sur I.

b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice.

87 **Optimiser un prix**

Le gérant d'un magasin de sport souhaite faire construire une aire rectangulaire à l'extérieur du magasin pour permettre aux clients de tester certains produits. Il veut que cette zone occupe 200 m² et que soit installée, sur trois de ses côtés, une clôture en bois coûtant 12 € le mètre. De plus, le long du côté attenant au mur du magasin, il fera poser une rangée de dalles en béton à 15 € le mètre.



Soient y la largeur et x la longueur du rectangle délimitant la zone. Le gérant aimerait connaître les valeurs de x et de y qui minimiseraient le prix de l'entourage de cette aire sachant que x est compris entre 10 et 40 m.

1. a. Montrer que $y = \dfrac{200}{x}$.

b. Montrer que le prix p de la construction de l'entourage peut s'exprimer en fonction de x et que :

$$p(x) = 27x + \frac{4800}{x}$$

2. Étudier les variations de p sur l'intervalle $[10 ; 40]$.

3. Déterminer les dimensions de la zone pour que le prix de l'entourage soit minimal.

Combien le gérant devra-t-il payer ?

88 ALGO **Consommation en carburant et vitesse**

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants. Cette consommation est une fonction de la vitesse moyenne de ce véhicule.

Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur $[30;130]$ par $f(x)=\dfrac{8x^2-800x+30\,000}{x^2}$ où x est exprimé en km/h et $f(x)$ en litre pour 100 km.

1. Quelle est la consommation de ce véhicule lorsqu'il roule à une vitesse moyenne de 50 km/h ?

2. Déterminer la dérivée f' de f sur $[30;130]$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30;130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

4. Pour quelle vitesse moyenne la consommation est-elle minimale ? Que vaut alors cette consommation (arrondir le résultat à 0,01 près) ?

5. On considère l'algorithme en langage naturel ci-contre.

Quelle est la valeur de la variable x à la fin de l'exécution de l'algorithme ? En donner une interprétation concrète dans le contexte de l'exercice.

$x \leftarrow 30$

$y \leftarrow \dfrac{44}{3}$

Tant que $y \geqslant 4$ Faire

  $x \leftarrow x+1$

  $y \leftarrow \dfrac{8x^2-800x+30\,000}{x^2}$

Fin Tant que