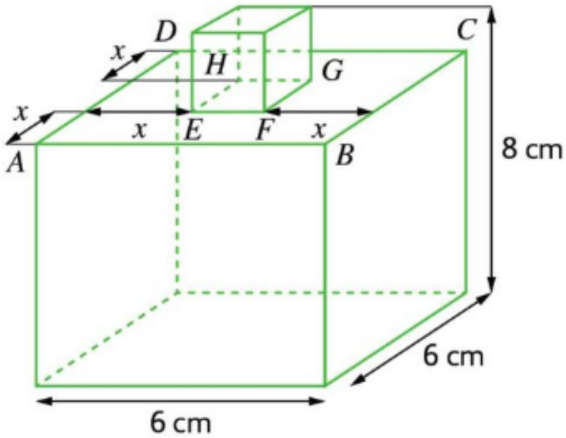
Bac blanc de première MPS : Mathématiques

Exercice 1 *5 points*

Un designer a conçu un flacon pour un parfum composé d'un parallélépipède rectangle de base carrée surmonté d'un cube comme le montre la figure ci-dessous.



Le cube de base *EFGH* est placé au centre du carré supérieur *ABCD*. On note *x* la distance entre les côtés du carré de base *EFGH* du cube et les côtés du carré *ABCD*.
Le flacon a une hauteur totale de 8 cm et les côtés du carré *ABCD* mesurent 6 cm. On admettra que l'on a $0 \leq x \leq 3$.

Partie A

1. Démontrer que le volume du petit cube est : $u(x) = -8x^3 + 72x^2 - 216x + 216$

2. En déduire que le volume total du flacon est égal à : $v(x) = -8x^3 + 72x^2 - 144x + 288$

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur par : $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 36$

1. a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire son signe sur $[0;3]$.

c. Construire le tableau de variations de *f* sur $[0;3]$.

2. En déduire le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle et la valeur de *x* correspondante.

Partie C

Vérifier que le volume total du flacon vérifie $v(x) = 8f(x)$ pour tout réel *x* de $[0;3]$.

À l'aide des résultats de la partie B., déterminer la valeur, en cm^3 arrondie à l'unité, du volume minimal de ce flacon.

Exercice 2 ***5 points***

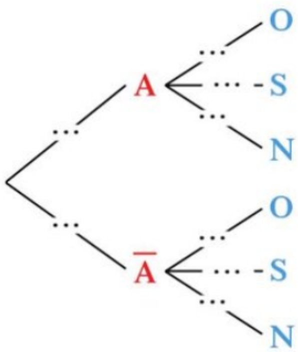
Une ville possède deux clubs de football : L'Olympique et le Sporting.
À l'occasion d'un match entre ces deux équipes, un pari est lancé auprès des supporters.
Parmi les parieurs, 75% soutiennent l'Olympique et 25% le Sporting. Aucun parieur ne supporte les deux équipes.

Peu avant le match, on apprend que 80% des supporters de l'Olympique ont parié sur sa victoire, contre 10% pour sa défaite et 10% pour un match nul. Parmi les supporters du Sporting, 70% ont parié pour sa victoire, 20% pour sa défaite et 10% pour un match nul.
On choisit au hasard un parieur.

On note :

- A : « le parieur est supporter de l'Olympique »,
- O : « le parieur mise sur la victoire de l'Olympique »,
- S : « le parieur mise sur la victoire du Sporting »
- N « le parieur a misé sur un match nul ».

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2. Calculer la probabilité que le parieur soit supporter de l'Olympique et donne son équipe gagnante.

3. a. Montrer que la probabilité de l'événement O est égale à 0,65.

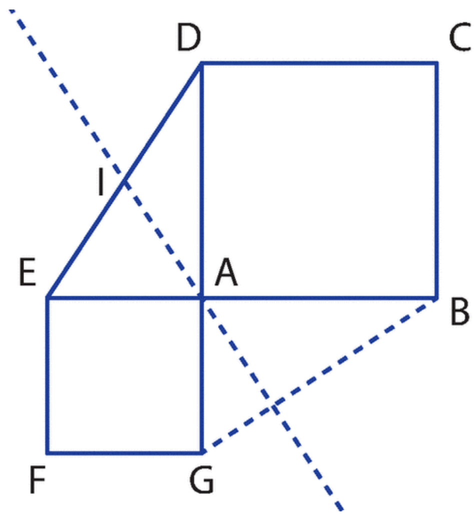
b. Calculer la probabilité de l'événement N.

4. Calculer la probabilité que le parieur soit supporter de l'Olympique sachant qu'il a donné l'Olympique gagnant.

5. Les événements A et O sont-ils indépendants ?

Exercice 3 *5 points*

$ABCD$ est un carré de côté a et $AEFG$ est un carré de côté b avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-dessous.



Le point I est le milieu du segment $[DE]$.

Partie A : Sans coordonnées

1. Justifier que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$.

2. Développer le produit scalaire $\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}\right)$ puis le calculer.

3. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

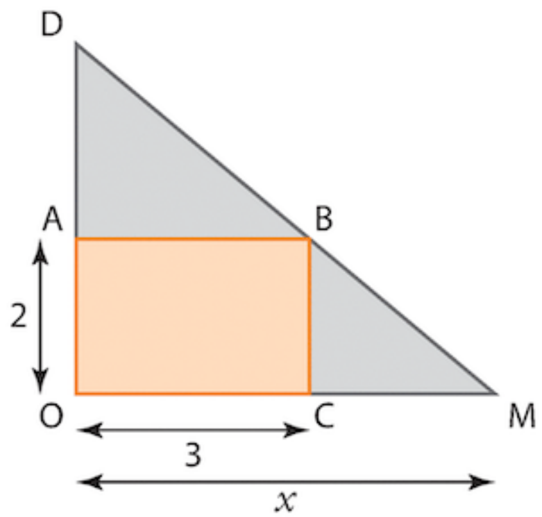
Partie B : Avec coordonnées

1. Dans le repère $(A;B,D)$ donner les coordonnées des points A, I, B et G.

2. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

Exercice 4 ***5 points***

Un charpentier doit construire le toit incliné (DM) au dernier étage d'une maison, en laissant un espace rectangulaire vide $(OABC)$ qui correspondra à la surface habitable de cet étage.
Il observe qu'il peut faire varier l'inclinaison de ce toit tout en conservant l'espace habitable *OABC*.
Ainsi la hauteur *OD* va varier en fonction de la largeur au sol *x*. Afin d'optimiser l'espace de rangement *BCM* et l'espace « grenier » *ABD*, il souhaite établir la largeur *x* qui permettrait de maximiser la surface *OMD*. Dans le schéma ci-dessous les longueurs sont exprimées en mètres.



1. À l'aide d'un théorème de géométrie, exprimer *OD* en fonction de *x*.

2. En déduire que l'aire du triangle *OMD* peut être modélisée par la fonction *g* définie sur l'intervalle $]3;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$.

3. a. Montrer que $g'(x)=\dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]3;+\infty[$.

c. Construire le tableau de variations de *g* sur $]3;+\infty[$.

4. Conclure.