11 : Variable aléatoire

Exercice 1

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré et à noter le nombre obtenu.
* Si ce nombre est inférieur ou égal à 4, on perd un euro.
* Si ce nombre est un 5, on ne perd rien et on ne gagne rien.
* Si ce nombre est un 6, on gagne *n* euros.

Déterminer la valeur de *n* pour que ce jeu soit équitable.

Exercice 2

X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'appels reçus à un standard téléphonique durant une minute. Une étude statistique a conduit aux résultats suivants.

a	0	1	2	3	4	5
$P(X = a)$	0,1	0,15	0,25	0,3	0,15	0,05

1. Calculer $P(X \leq 2)$ et $P(1 \leq X \leq 4)$. Interpréter ces probabilités.

2. Calculer la probabilité que le standard ait reçu au moins 3 appels pendant une minute donnée.

Exercice 3

Tobias veut acheter un ticket de jeu à gratter. Le prix du ticket est de 2€.
Parmi les 20 tickets en vente dans le magasin, 14 sont des tickets perdants, 3 font gagner 2€ et les 3 autres font respectivement gagner 5 €, 10 € et 50 €.
Le vendeur choisit au hasard le ticket qu'il vendra à Tobias.
On note *X* le gain de Tobias, c'est-à-dire la différence, éventuellement négative, entre le montant gagné et le prix du ticket.
1. Donner la loi de probabilité de *X*.

2. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de *X* avec la calculatrice.
Arrondir au centième si besoin.

Exercice 4

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, marquées respectivement : 0, 0, 2 et 10.
On peut tirer ou bien une boule ou bien deux boules simultanément.
Si le joueur tire une boule, le nombre marqué sur celle-ci donne le gain *X* en euros.
Si le joueur tire deux boules, le gain *Y* en euros est égal au produit des nombres marqués sur les deux boules.
1. Déterminer la loi de probabilité de *X*. Calculer $E(X)$.

2. Déterminer la loi de probabilité de *Y*. Calculer $E(Y)$.

3. Pour un joueur, vaut-il mieux tirer une boule ou deux boules ?

Exercice 5

Dans un centre de don du sang, on a observé parmi les donneurs la répartition des groupes sanguins donnée dans le tableau incomplet ci-dessous.

O	A	B	AB
43 %	45 %		

1. Il y a trois fois plus de donneurs du type B que du type AB. En déduire les pourcentages manquants.

2. Un infirmier prélève au hasard un dossier dans le fichier de l'ensemble des donneurs, note le groupe sanguin, repose le dossier, puis effectue un second tirage dans les mêmes conditions, de façon indépendante.
X est la variable aléatoire qui indique le nombre de donneurs du groupe B parmi les deux dossiers tirés au sort.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer et interpréter la probabilité $P(X \geq 1)$.

Exercice 6

Sur les 700 salariés d'une usine, 140 sont des cadres, les autres sont des ouvriers. Des stages de formation continue sont organisés chaque année, tels que :
* chaque salarié participe à un stage au plus ;
* 9 % des salariés partent en stage ;
* 10% des ouvriers partent en stage.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

	Ouvriers	cadres	Total
En stage			
Pas en stage			
Total		140	700

2. On rencontre un salarié au hasard.
a. Quelle est la probabilité que ce soit un ouvrier ?
b. Quelle est la probabilité que ce soit un ouvrier partant en stage ?
Quelle est la probabilité que ce soit un cadre partant en stage ?

3. Chaque stage dure 10 jours pour un ouvrier et 8 jours pour un cadre. On note X la variable aléatoire comptant Le nombre de jours de stage suivis par un salarié de l'usine.
a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.
d. Calculer l'écart-type de X.

Exercice 7

Un jeu consiste à miser 10€, puis à réaliser un tirage en deux étapes.

1ère étape

Le joueur tire au hasard un billet dans un panier contenant dix billets marqués « U_1 » et deux billets marqués « U_2 ».

2e étape

* si le joueur obtient un billet « U_1 », il tire un jeton dans l'urne U_1 dans laquelle se trouvent dix jetons « Perdant » et deux jetons « Gagnant ».
* Si le joueur obtient un billet « U_2 », il tire un jeton dans l'urne U_2 dans laquelle se trouvent sept jetons « Perdant » et cinq jetons « Gagnant ».

On note A l'événement « le joueur a tiré un billet marqué U_1 et G l'événement « le joueur a tiré un jeton Gagnant ».

1. Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.

2. Calculer la probabilité des événements $G \cap A$ et $G \cap \overline{A}$.

3. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{5}{24}$.

4. Déterminer $P_G(A)$.

5. Le joueur reçoit 35€ s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_1 et 60 € s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_2. Sinon il ne reçoit rien et perd sa mise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 8

Une urne contient dix boules blanches et n boules roses.
Un joueur effectue deux tirages avec remise dans cette urne.
Chaque boule blanche tirée rapporte 2 euros et chaque boule rose fait perdre 3 euros.
On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. En utilisant un arbre pondéré, montrer que : $p(X=-1)=\dfrac{20n}{(10+n)^2}$.

3. Donner La Loi de probabilité de X.

4. Montrer que $E(X)=\dfrac{400-20n-6n^2}{(10+n)^2}$

5. À partir de quelle valeur de n l'espérance devient-elle négative ?

Exercice 9 : Bac Polynésie 2006

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
1. Utiliser un arbre pondéré pour représenter cette expérience aléatoire.

2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.
a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Calculer $p(X=0)$.

c. Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\dfrac{8}{45}$

d. En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $p(X=1)$.

3. a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer et interpréter $E(X)$.