08 : Fonction exponentielle

Exercice 1

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0,5e^{0,173x}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer le sens de variation de *f*.

2. Montrer que pour tout *x* et *T*, $f(x+T)=e^{0,173T}f(x)$.

3. On souhaite déterminer le réel *T* tel que pour tout réel *x*, $f(x+T)=2f(x)$.

a. Justifier que $f(T)=2f(0)$.

b. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction T_exp retourne une valeur approchée à 0,01 près du réel *T*.

```
from math import*
def T_exp():
    T=0
    y=0.5
    while ...:
        T=T+0.01
        y=0.5*exp(0.173*T)
    return (...)
```

c. Quelle valeur est affichée par le programme ?

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(5-x)e^{x}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de *f*.

3. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$.

1. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $2x-x^2$.

2. Construire le tableau de variation de *f*.

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(e^{x}-1\right)^{2}$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Construire le tableau de variation de *f*.

Exercice 5

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{e^{x}}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe.

2. Construire le tableau de variation de *f*.

3. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 6

Soit *f* la fonction définie sur $[2;10]$ par $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}-3}$.

1. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^{2}-2x-3$.

2. Construire le tableau de variation de *f*.

Exercice 7

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-2x}$.

1. Montrer que $f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$.

2. Construire le tableau de variation de *f*.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et construire le tableau de variation de f.

2. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

3. Étudier la position relative de C_f par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 9

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}$ et $g(x)=2e^x-1$.
On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.
1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point elles ont la même tangente T dont on déterminera une équation.

2. On veut étudier la position relative de la courbe C_g et de la droite T.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2e^x-2x-2$.
a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Calculer $h'(x)$ et étudier son signe.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout réel x, $2e^x-1\geq 2x+1$.

d. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite T ?

3. On veut étudier la position relative des courbes C_f et C_g.
a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^x-1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g.

Exercice 10

1. À l'aide d'une calculatrice, faire une conjecture sur le nombre de points d'intersection de la courbe représentative de la fonction exponentielle de la droite d'équation $y = x + 1$.

2. Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de *x*.

b. Construire le tableau de variation de la fonction *f*.

3. Démontrer la conjecture faite dans la question 1.

Exercice 11

Soit *f* la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2x$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Construire le tableau de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

4.

a. Montrer que *f* admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Préciser en quelle valeur il est atteint.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit *T* la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 1.

a. Déterminer une équation de *T*.

b. Montrer que *T* passe par le point de coordonnées $(0; -e^2)$.