07 : Suites arithmétiques – Suites géométriques

Exercice 1

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $\frac{5}{4}$ et de premier terme $u_1 = 2$.

1. Exprimer u_n en fonction de *n*.

2. Que vaut u_{40} ?

3. Existe-t-il une valeur de l'entier naturel *n* telle que $u_n = 772$? $u_n = 101$?

Exercice 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison négative. On sait que la somme des trois premiers termes vaut 81 et que leur produit vaut 18 360.

1. On note *r* la raison de cette suite. Exprimer u_0 et u_2 en fonction de u_1 et *r*.

2. Montrer qu'on a le système suivant : $\begin{cases} 3u_1 = 81 \\ u_1^3 - r^2 u_1 = 18360 \end{cases}$

3. En déduire la valeur de *r* et u_1.

4. calculer u_{40}.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

3. On suppose que pour tout entier naturel *n*, $u_n \neq 0$ et on définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et donner ces éléments caractéristiques.

b. Donner l'expression de v_n en fonction de *n*.

c. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

4. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$.

1. Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est une suite arithmétique.

2. Donner l'expression de v_n en fonction de *n*.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

4. Trouver la plus petite valeur de *n* telle que $u_n \geq 50$.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison *q* telle que $u_3 = 12$ et $u_6 = 324$.

1. Déterminer *q*.

2. exprimer u_n en fonction de *n*. En déduire u_4, u_7 et u_0.

3. Existe-t-il une valeur de l'entier naturel *n* telle que $u_n = 78732$?

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Soit (r_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $r_n = u_{n+1} - 3u_n$.
Montrer que la suite (r_n) est géométrique et déterminer sa raison de son premier terme.

3. En déduire l'expression de r_n en fonction de *n*.

4. Soit (s_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $s_n = u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que la suite (s_n) est géométrique et déterminer sa raison de son premier terme.

5. En déduire l'expression de s_n en fonction de *n*.

6. Montrer en utilisant les réponses aux questions **3.** et **5.** que, pour tout entier naturel *n* :

$$u_n = 3^n - 2^n.$$

Exercice 7

On étudie l'évolution de deux fourmilières *A* et *B*. chaque mois 20 % des fourmis de la population *A* passent en *B* et 30 % des fourmis de la population *B* passent en *A*. on note u_n et v_n le nombre total de milliers de fourmis le mois *n* respectivement dans les fourmilières *A* et *B*. Le nombre initial de fourmis est $u_0 = 320$ milliers et $v_0 = 180$ milliers.

1. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{7}{10}v_n \end{cases}$$

2. On pose $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = -2u_n + 3v_n$ pour tout entier *n*.

a. Montrer que la suite (s_n) est une suite constante et donner la valeur de cette constante.

b. Montrer que la suite (t_n) est une suite géométrique dont on donnera les éléments caractéristiques.

3. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de *n*.

4. Déterminer la limite de (u_n) et celle de (v_n).

Exercice 8

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Déterminer la fonction *f* telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$ et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution α.

2. Montrer que *f* est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

3. Placer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses du graphique joint en annexe, sur lequel est tracée la courbe représentative de *f*.
Aucune justification n'est demandée mais on laissera les traits de construction.

4. Donner une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

5. On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

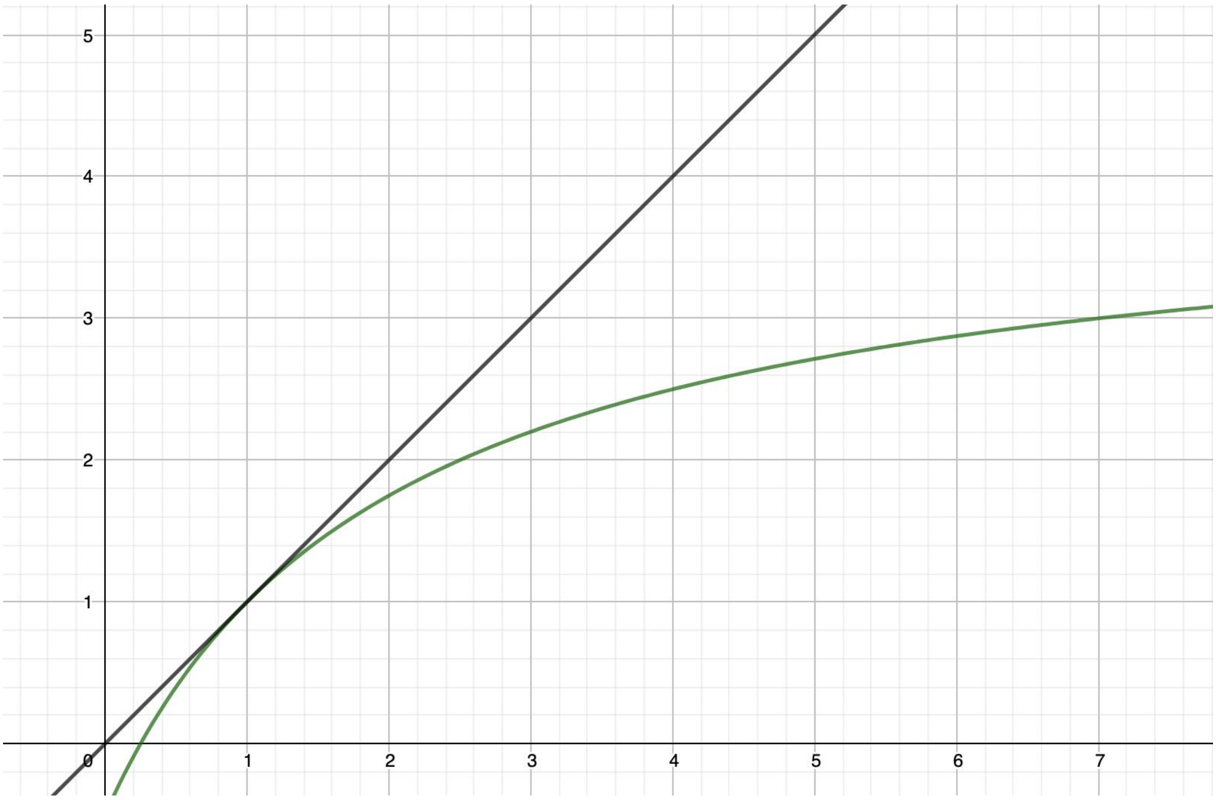
Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

6.

a. Donner une expression de v_n en fonction de n.

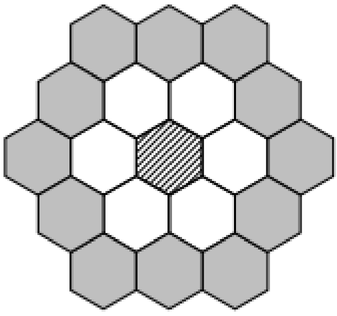
b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

7. Démontrer que la suite (u_n) est converge vers un nombre que l'on précisera.



Exercice 9 (EE3)

Un artisan commence la pose d'un carrelage dans une grande pièce.
Le carrelage choisi a une forme hexagonale.



L'artisan pose un premier carreau au centre de la pièce puis procède en étapes successives de la façon suivante :

* à l'étape 1, il entoure le carreau central, à l'aide de 6 carreaux et obtient une première forme.
* à l'étape 2 et aux étapes suivantes, il continue ainsi la pose en entourant de carreaux la forme précédemment construite.

On note u_n le nombre de carreaux ajoutés par l'artisan pour faire la *n*-ième étape ($n > 1$).

Ainsi $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

1. Quelle est la valeur de u_3 ?

2. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de raison 6. Exprimer u_n en fonction de *n*.

3. Combien l'artisan a-t-il ajouté de carreaux pour faire l'étape 5 ? Combien a-t-il alors posé de carreaux au total lorsqu'il termine l'étape 5 (en comptant le carreau central initial) ?

4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Montrer que $S_n = 6(1+2+3+...+n)$ puis que $S_n = 3n^2 + 3n + 1$.

5. Si on compte le premier carreau central, le nombre total de carreaux posés par l'artisan depuis le début, lorsqu'il termine la *n*-ième étape, est donc $3n^2 + 3n + 1$.
À la fin de sa semaine, l'artisan termine la pose du carrelage en collant son 2977$^{\text{ème}}$ carreau.
Combien a-t-il fait d'étapes ?