06 : Exercices sur la dérivation

Exercices 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5x^2}{2}+3x-1$

2. $f(x)=\dfrac{x^4+6x^2-5}{4}$

3. $f(x)=-\dfrac{3}{5}x^5-\sqrt{2}x^3+\left(5-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{3}$

4. $f(x)=(3x+5)^2$

5. $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$

6. $f(x)=x^3-3\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}$

Exercices 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\left(x^2+1\right)(3x-5)$

2. $f(x)=(3x-2)^2$

3. $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$

4. $f(x)=x^3\left(x^2-1\right)$

Exercices 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$

2. $f(x)=\dfrac{-5}{x^2+1}$

3. $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x-3}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$

5. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+x+1}$

6. $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{2x+1}$

Exercices 4

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{4x-1}$

2. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-1}$

Exercices 5

Les fonctions *f* et *g* sont définies sur R − {−1} par : $f(x)=\dfrac{5x+7}{x+1}$ et $g(x)=5+\dfrac{2}{x+1}$.

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions *f* et *g*. Que remarque-t-on ?

2. Calculer $f(x)-g(x)$. Pouvait-on prévoir la remarque de la question **1.** ?

Exercices 6

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+x-2$, et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente *T* à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

2. Montrer que pour tout réel *x*, on a $f(x)-(2x-3)=(x-1)^2(x+1)$.

3. En déduire la position relative entre C_f et *T*.

Exercices 7

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-6x+1$ et C_f sa courbe représentative.

1. a. Résoudre l'équation $f'(x)=0$.

b. Interpréter géométriquement le résultat.

2. Déterminer les abscisses des points de C_f en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite *D* d'équation $y=-4x+1$.

Exercices 8

Pour les fonctions suivantes, déterminer la dérivée $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$ puis construire le tableau de variations de *f* sur *I*.

1. $f(x)=x^2-3x+1$ sur $I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=2x^3+9x^2-60x+11$ sur $I=\mathbb{R}$

3. $f(x)=x^4-2x^2-1$ sur $I=\mathbb{R}$

4. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2-x}$ sur $I=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

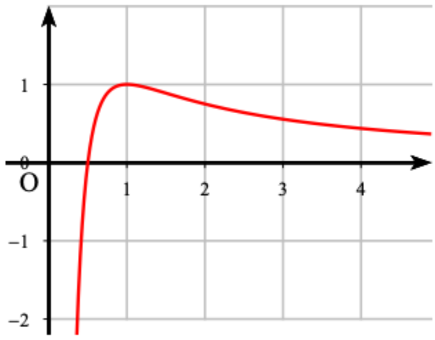
5. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ sur $I=\mathbb{R}$

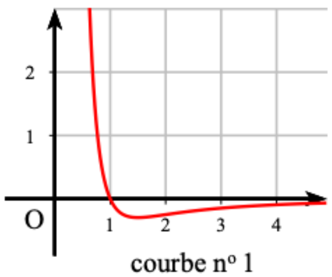
6. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$ sur $I=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

Exercices 9

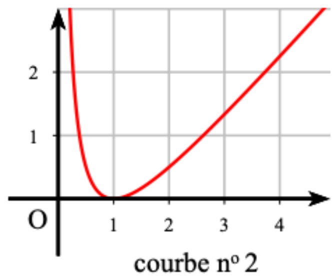
La figure ci-contre est la représentation graphique C_f d'une fonction *f* dérivable sur $]0;+\infty[$.

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de *f*. On justifiera la réponse.

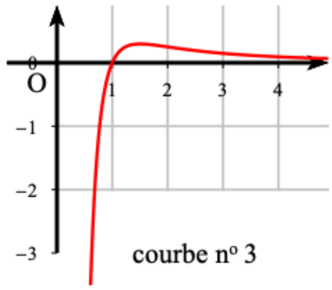




courbe n° 1



courbe n° 2



courbe n° 3

Exercices 10

1. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{-3x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Démontrer que, pour tout $x\in[-2;2]$, on a : $-4\leq f(x)\leq -2$.

2. Soit *g* la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+1}$.

Démontrer que, pour tout $x\geq 0$, on a : $0\leq g(x)\leq 2$.

Exercices 11

1. Soit *f* la fonction définie $[0;10]$ par $f(x)=-x^2+10x$.

Étudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations sur $[0;10]$.

2. Soit x et y deux nombres tels que $x+y=10$.

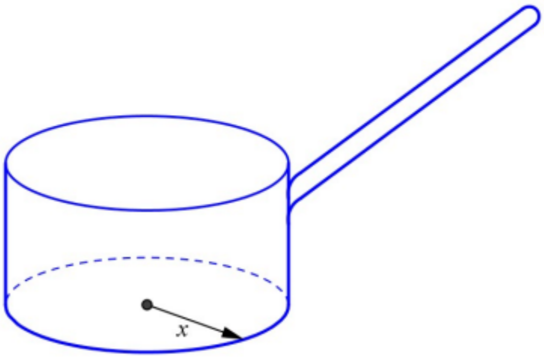
On cherche à déterminer pour quelle valeur de x et y leur produit $P=x.y$ est maximal.

a. Exprimer y puis P en fonction de x.

b. Quels sont alors les réels x et y de somme 10 et de produit maximal ?

Exercices 12 : Casserole

Pourquoi la hauteur d'une casserole est approximativement égale à son rayon quel que soit sa contenance ?



Pour répondre à cette question, on se propose de résoudre le problème suivant :

Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de matière possible ?

On suppose que le prix de revient du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole.

L'unité est le centimètre. On note x le rayon du cercle du fond, h la hauteur et S l'aire totale égale à l'aire latérale plus l'aire du fond.

1. Exprimer h en fonction de v et x.

2. Exprimer S en fonction de v et de x.

3. Étudier sur $]0;+\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f\left(x\right)=\pi x^2+\dfrac{2v}{x}$.

4. En déduire la réponse à la question.

<u>Rappels</u> :

Volume de cylindre : $V=\pi x^2\times h$

Aire latérale de cylindre : $S=2\pi R\times h$