05 : Probabilités conditionnelles

I. Probabilités conditionnelles

On considère une expérience aléatoire, d'univers associé Ω, muni d'une loi de probabilité *P*.

1. Réalisation d'un événement sous condition

Définition

Soient *A* et *B* deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.
On note $P_A(B)$ la probabilité que l'événement *B* se réalise sachant que l'événement *A* est réalisé. On a :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques

- $P_A(B)$ se lit « probabilité conditionnelle de *B* sachant *A* ».
- $P_A(A) = 1$
- Si la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ est connue, la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée avec la formule : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exemples

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'élèves reçus ou non au baccalauréat dans une classe de terminale.

	Reçu	**Non reçu**	**Total**
Filles	18	1	19
Garçons	13	3	16
Total	31	4	35

La probabilité que l'élève soit reçu sachant que l'élève est une fille : $P_F(R) = \dfrac{P(F \cap R)}{P(F)} = \dfrac{18}{19}$.

La probabilité que l'élève soit une fille sachant que l'élève est reçu : $P_R(F) = \dfrac{P(F \cap R)}{P(R)} = \dfrac{18}{31}$.

Exercice 1

On demande à un échantillon de clients d'un fournisseur de téléphonie si, en cas de problème, ils préfèrent contacter le service après-vente (SAV) par téléphone ou s'ils préfèrent se rendre directement en boutique. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	+18 ans	−18 ans	Total
En boutique	110	36	146
Par téléphone	40	64	104
Total	150	100	250

On choisit, au hasard, un client de l'échantillon.
1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
A « le client est un adulte de 18 ans ou plus » ; B « le client préfère se rendre en boutique ».

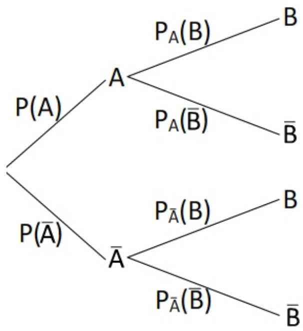
2. Sachant que le client choisi préfère se rendre en boutique, quelle est la probabilité que ce client soit un adulte ?

3. Le client choisi est un adolescent de moins de 18 ans, calculer la probabilité qu'il préfère contacter le SAV par téléphone.

2. Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Règles

De nombreuses situations peuvent être modélisées par des arbres à deux niveaux comme celui ci-dessous où A et B sont deux événements de Ω.



- Les probabilités au 1$^{\text{er}}$ niveau sont des probabilités simples.
- Les probabilités au 2$^{\text{ème}}$ niveau sont des probabilités conditionnelles.
- Le chemin complet A suivi de B représente l'événement $A \cap B$.
- La somme des probabilités sur les branches de même origine est égale à 1.

Propriété

La probabilité d'un chemin complet est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin : c'est le principe multiplicatif.
Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exercice 2

Pour des raisons sanitaires, une municipalité a recensé les chiens du village.

- 80% sont traités contre les puces ;
- 30 % des chiens traités contre les puces ont des puces ;
- 5 % des chiens non traités contre les puces n'ont pas de puces.

Dans la liste des chiens de ce village, on en choisit un au hasard et on note :
T l'événement : « Le chien est traité contre les puces ;
P l'événement : « Le chien a des puces ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer $P_{\overline{T}}\left(\overline{P}\right)$ et $P\left(\overline{T} \cap \overline{P}\right)$.

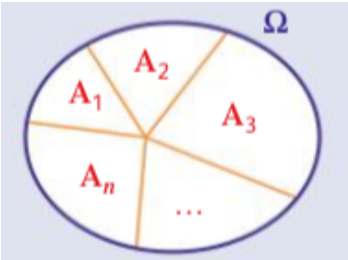
3. Calculer la probabilité que le chien soit traité et n'ait pas de puce.

II. Formule des probabilités totales

1. Partition de l'univers

Définition

Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un univers Ω, de probabilités non nulles, forment une partition de l'univers lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.



Remarques

On dit que deux événements A et B sont incompatibles ou disjoints lorsqu'on a $A \cap B = \varnothing$.

Propriété

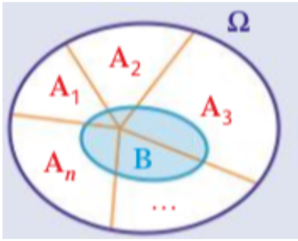
Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité non nulle et $\overline{A}$ son événement complémentaire (ou événement contraire).
Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω.

2. Formule des probabilités totales

Propriété

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω.
Pour tout événement B de l'univers Ω, on a la formule suivante, appelée formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$



Conséquences

- Pour tous événements A et B avec $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
  La formule des probabilités totales peut donc s'écrire sous la forme
  $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

- Comme A et $\overline{A}$ est une partition, on a $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 3

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir, sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On note :

- M l'événement « Être porteur de la maladie »
- T l'événement « Avoir un test positif ».

1. Faire un arbre de probabilité.

2. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

3. Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

III. Indépendance en probabilité

1. Événements indépendants

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

Définition

On ne dit que A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque

Deux événements sont indépendants lorsque l'un n'influence pas l'autre.

Propriété

A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$ (ou bien $P_B(A) = P(A)$).

Démonstration

A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Exercice 4

Lorsqu'un basketteur tire en match, il y a 53 % de chance que ce soit un tir à 2 points et 47 % que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est de 51,5 % contre 43,5 % à 3 points.
Lorsque le basketteur tire en match, on considère les événements suivants :
D : « Il tire à 2 points » ;
M : « Il marque ».
1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

2. Calculer la probabilité qu'il tire à 3 points et qu'il marque.

3. Déterminer la probabilité qu'il marque.

4. Les événements D et M sont-ils indépendants ?

5. Le basketteur n'a pas marqué. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré à 2 points ?

Propriété

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration

On a : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
On en déduit : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
A et B étant indépendants, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
D'où : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \times P(B)$.
$P(A \cap \overline{B}) = P(A)[1 - P(B)]$.
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$
Ainsi par définition A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2. Épreuves indépendantes

Définition

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une succession de deux épreuves indépendantes.

Remarques

On peut représenter la situation par un arbre de probabilité, la seconde partie de l'arbre ne dépendant pas de la première partie ou bien un tableau à double entrées.

Exercice 5

Sur un trajet, il y a deux feux tricolores qui ne sont pas synchronisés.
Quand on s'y présente, la probabilité que le premier feu soit vert est 0,45 et la probabilité que le deuxième feu soit vert est 0,4.
1. Pourquoi peut-on penser que les deux épreuves (ou expériences aléatoires) consistant à se présenter au premier feu et regarder s'il est vert ou non et à se présenter au deuxième feu et regarder s'il est vert ou non sont indépendantes ?

2. On considère que ces deux épreuves sont en effet indépendantes. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau à double entrée.