04 : Suites numériques : Généralités

Exercice 1

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n(n-1)$.

1. Calculer u_0, u_5, u_{10} et u_{30}.

2. Exprimer u_{n-1} et u_{n+1} en fonction de *n*.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) telle que : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{2}n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Écrire une relation liant u_n et u_{n-1}.

Exercice 3

Étudier la monotonie des suites dont le terme général est :

$s_n = \dfrac{1}{n+1}$ $u_n = n - \sqrt{n}$; $w_n = \dfrac{2^n}{n^2}$. $\begin{cases} t_0 = 0,5 \\ t_{n+1} = t_n(1-t_n) \end{cases}$

Exercice 4

Soit u la suite définie, pour tout entier naturel *n*, par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{2}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite *u*.

2. Soit *v* la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Calculer les premiers termes de la suite *v* et établir une relation de récurrence simple reliant deux termes consécutifs de la suite *v*.

b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $v_n < 0$.

c. Quel est le sens de variation de la suite *u* ?

Exercice 5

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

* Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve ;
* Entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve perd 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

Selon ce modèle, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$.

On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$

3. On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 1520$ et (t_n) telle que $t_n = 1480 \times 0,95^n$.

a. Vérifier que $v_0 = t_0$ puis que $v_{n+1} = 0,95v_n$ et $t_{n+1} = 0,95t_n$. Que peut-on en déduire ?

b. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

4. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés dans la réserve sera inférieur à 2000.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin Tant que
```

5. Quelle est cette année ?