# 04 : Suites numériques : Généralités

## I. Définir une suite numérique

### 1. Généralités

Une suite numérique est une succession de nombres réels, chacun étant un terme de la suite. On numérote les termes, le plus souvent à partir de 0 ou de 1, ce qui revient à faire correspondre à des entiers naturels des nombres réels.

**Exemple**

| Indice | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Terme | 3 | 9 | 27 | 81 |

**Définition**

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

### 2. Notation

L'image de l'entier *n* par la suite *u* se note $u_n$ au lieu de $u(n)$. $u_n$ se lit "*u* indice *n*".
On dit que $u_n$ est le terme de **rang** *n*. La suite *u* se note aussi $u(n)$.

**Remarque**

Pour une suite *u*, le terme suivant $u_n$ est $u_{n+1}$ et le terme précédent $u_n$ est $u_{n-1}$.

**Exercice 1**

Soit la suite *u* définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n(n-1)$.
**1.** Calculer $u_0$, $u_5$, $u_{10}$ et $u_{30}$.
**2.** Exprimer $u_{n-1}$ et $u_{n+1}$ en fonction de *n*.
**3.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

Il y a deux façons de générer une suite : par une formule explicite ou par récurrence.

### 3. Suite définie par une formule explicite

**Définition**

Définir une suite par une formule explicite, c'est, pour tout entier naturel *n*, donner une relation de la forme $u_n = f(n)$ où *f* est une fonction définie sur $[0;+\infty[$.
Un terme $u_n$ s'exprime directement en fonction de son rang *n*.

## 4. Suite définie par une relation de récurrence

### Définition

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner la valeur du terme Initial, $u_0$ par exemple, et un procédé qui permet de calculer un terme à partir de celui qui le précède.
Pour tout entier *n*, on a :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

### Remarque

Pour calculer un terme, on a besoin de calculer pas à pas tous ceux qui le précèdent.

### Application

On donne $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

**1.** Déterminer les 5 premiers termes de la suite. Vérifier les résultats à la TI (touche ANS)
**2.** À partir de quel rang on a $u_n > 125$ ?

### Exercice 2

On considère la suite $(u_n)$ telle que : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{2}n$.

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
**2.** Écrire une relation liant $u_n$ et $u_{n-1}$.

## II. Sens de variation d'une suite

### 1. Définition

- La suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang *p* si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite $(u_n)$ est décroissante à partir du rang *p* si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite $(u_n)$ est constante ou stationnaire à partir du rang *p* si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} = u_n$.
- 

### Remarques

On dit qu'une suite est monotone si elle est soit croissante soit décroissante.

## 2. Détermination du sens de variation

3 techniques sont à retenir :

- On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.
- Si $u_n = f(n)$, on étudie les variations de *f*.

### Exercice 3

Étudier la monotonie des suites dont le terme général est :

$s_n = \frac{1}{n+1}$ $u_n = n - \sqrt{n}$ ; $w_n = \frac{2^n}{n^2}$. $\begin{cases} t_0 = 0,5 \\ t_{n+1} = t_n(1 - t_n) \end{cases}$

## III. Comportement d'une suite à l'infini

## 1. Suite convergente

On considère la suite $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

On construit le tableau de valeurs à l'aide de la TI :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 50 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0,75 | 1 | 1,167 | 1,286 | 1,375 | 1,615 | 1,722 | 1,906 | 1,99 |

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.

On dit que la suite $(u_n)$ converge vers 2 et on note : $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 2$.

## 2. Suite divergente

### Exemple 1

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier *n* par $u_n = n^2 - 1$.

$u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_{10} = 99$, $u_{100} = 9999 \ldots$

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

On dit que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

**Exemple 2**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier *n* par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$

$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, $u_4 = 16 \ldots$

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

On dit que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$

**Exemple 3**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier *n* par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (-1)^n u_n$.

$u_0 = 2$, $u_1 = -2$, $u_2 = 2$, $u_3 = -2$, $u_4 = 2 \ldots$

Les valeurs de $u_n$ sont 2 ou $-2$, pour toute valeur de *n*.

$(u_n)$ ne tend pas vers un seul nombre lorsque *n* devient de plus en plus grand.

$(u_n)$ diverge.

**Exercice 4**

Soit *u* la suite définie, pour tout entier naturel *n*, par : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{2}$.

**1.** Calculer les cinq premiers termes de la suite *u*.

**2.** Soit *v* la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

**a.** Calculer les premiers termes de la suite *v* et établir une relation de récurrence simple reliant deux termes consécutifs de la suite *v*.

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $v_n < 0$.

**c.** Quel est le sens de variation de la suite *u* ?

**Exercice 5**

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1$^{\text{er}}$ juin 2017.
Le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- Entre le 1$^{\text{er}}$ juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve ;
- Entre le 1$^{\text{er}}$ novembre et le 31 mai, la réserve perd 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

Selon ce modèle, pour tout nombre *n* de $\mathbb{N}$, $u_n$ désigne le nombre de cétacés au 1$^{\text{er}}$ juin de l'année $2017 + n$.

On a donc $u_0 = 3000$.

**1.** Justifier que $u_1 = 2926$.

**2.** Justifier que, pour tout nombre entier naturel $n$ : $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$

**3.** On désigne par $(v_n)$ la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 1520$ et $(t_n)$ telle que $t_n = 1480 \times 0,95^n$ .

**a.** Vérifier que $v_0 = t_0$ puis que $v_{n+1} = 0,95v_n$ et $t_{n+1} = 0,95t_n$. Que peut-on en déduire ?

**b.** En déduire que, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$ .

**4.** Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés dans la réserve sera inférieur à 2000.

```
Defsuite( )
n = 0
u = 3000
While …
n = …
u = …
Return n
```

**5.** Quelle est cette année ?