01 : Le second degré

I. Fonction polynôme du second degré

1. Fonction polynôme

Définition

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
a b et c sont appelés coefficients du polynôme.

Remarque

L'expression $ax^2 + bx + c$ est la forme développée de $f(x)$, où trinôme du second degré.

2. Forme canonique

Propriété et définition

Toute fonction polynôme du second degré de forme développée $ax^2 + bx + c$ admet une écriture de la forme : $a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$, où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f\left(\alpha\right)$.
Cette écriture est la forme canonique du polynôme.

Exercice 1
Donner la forme canonique des trinômes suivants :

$f\left(x\right) = -x^2 + 2x - 5$ $\qquad$ $g\left(x\right) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 5$

Remarque

On peut utiliser la méthode suivante :
$f\left(x\right) = -x^2 + 2x - 5 = -\left(x^2 - 2x + 5\right)$

On remarque que $x^2 - 2x$ et le début de l'identité remarquable $\left(x-1\right)^2$, on a :

$x^2 - 2x = \left(x-1\right)^2 - 1$

Donc $f\left(x\right) = -\left[\left(x-1\right)^2 - 1 + 5\right]$

$f\left(x\right) = -\left(x-1\right)^2 - 4$

Faire de même avec g.

3. Variations et représentation graphique

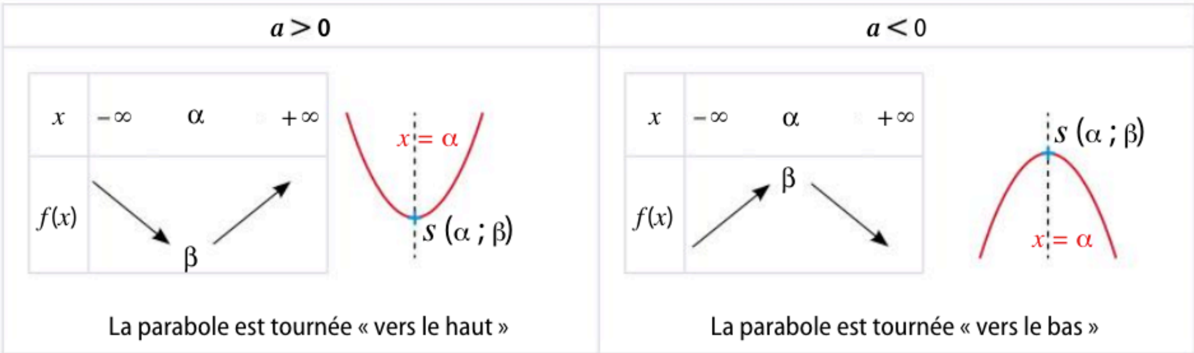
Théorème

Soit f la fonction polynôme de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
- Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Propriété

Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$ qui admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.



Exercice 2

Donner le tableau de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = 3 - (x+2)^2$ $\qquad$ $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

II. Résolution d'une équation du second degré et factorisation

1. Discriminant

Définition

Soit f la fonction polynôme de degré 2 telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle discriminant de f le nombre Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple

$f(x) = 3x^2 + x - 2$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$

2. Résolution d'une équation du second degré

Théorème

Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

- Si $\Delta<0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta=0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque

Les éventuelles solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées **racines** du trinôme ax^2+bx+c.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

$2x^2-x-3=0$ $\qquad$ $2x^2-12x+18=0$ $\qquad$ $x^2-3x+4=0$

3. Somme et produit de racines

Soit x_1 et x_2 les racines du polynôme du second degré ax^2+bx+c. On a alors :

- La somme des racines : $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
- Le produit des racines : $P=x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

Application

Soit $f(x)=5x^2-4x-1$

Trouver une racine évidente de *f* puis en déduire la deuxième racine.

4. Factorisation

Théorème

- Si $\Delta<0$, le trinôme ax^2+bx+c ne se factorise pas.
- Si $\Delta=0$, on a : $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=a\left(x-x_0\right)^2$.
- Si $\Delta>0$, on a : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ où $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 3

Déterminer la forme factorisée puis développée du polynôme du second degré f qui admet -2 et 5 comme racines et telle que $f(-1)=-36$

Exercice 4

Déterminer deux nombres réels tels que leur somme est 2 et leur produit est $\frac{3}{4}$.

Exercice 5

f est une fonction polynôme du second degré admettant 2 pour racine et dont la somme des racines est -7.

1. Déterminer sous forme factorisée une expression de $f(x)$.

2. Déterminer la forme développée de $f(x)$ sachant que $f(0)=6$.

III. Signe d'un trinôme du second degré

Théorème

ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines, lorqu'elles existent.

Exercice 6

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

$f(x)=2x^2+x-1$ $\qquad g(x)=-x^2+x+6$ $\qquad h(x)=x^2+x+1$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<0$ avec $f(x)=2x^2+x-1$.

Exercice 8

1. Étudier le signe des trinômes suivants :

a. $N(x)=x^2+2x-3$ $\qquad$ **b.** $D(x)=-x^2+16x-16$.

2. Soit $P(x)=\dfrac{-3x^2+30x-29}{-x^2+16x-16}$. Résoudre $P(x)\geq 2$.

Exercice 9

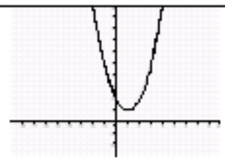
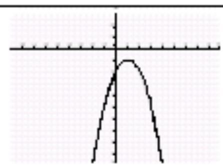
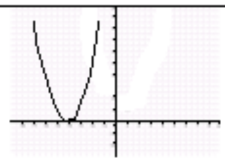
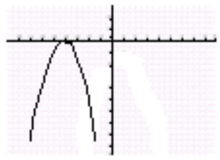
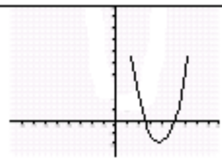
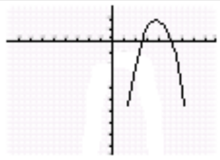
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{x-2}{2x^2-3x-2}=\dfrac{x^2}{2x^2+13x+6}$

Exercice 10

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+8x-11$ et $g(x)=x-1$.

Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

IV. Tableau récapitulatif

	Résolution de l'équation	Factorisation de $a\,x^2 + b\,x + c$	Parabole représentant la fonction polynôme	
			$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation sous forme de produit de deux facteurs du premier degré.		
			f est du signe de a	
$\Delta = 0$	Une racine double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$a\,(x - x_0)^2$		
			f est du signe de a	
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$		
			f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de –a à l'intérieur des racines ;	