Cahier de vacances de première à terminale
Mathématiques

TABLE DES MATIERES

05 – Probabilités conditionnelles

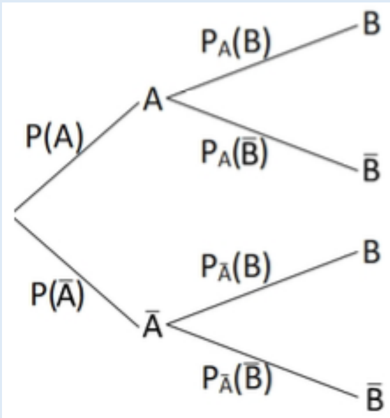
Rappel de cours

Probabilités conditionnelles

$P_A(B)$ est la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, avec $P(A) \neq 0$.

Arbre pondéré



Probabilités totales

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Événements indépendants

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$

Haut du document

Calcul de probabilités conditionnelles

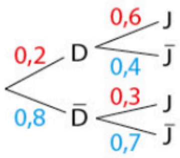
Une administration emploie 20 % de C.D.D. (Contrat à Durée Déterminée).
60 % des C.D.D. et 30 % des C.D.I. (Contrat à Durée Indéterminée) ont moins de 30 ans.
Dans la base de données des employés, on tire au hasard le nom de l'un des employés.
On note D l'événement : « L'employé est en C.D.D. » et J l'événement : « L'employé a moins de 30 ans ».

a) Traduire les données en termes de probabilités, en utilisant les événements D et J.

b) Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit en C.D.D. et ait moins de 30 ans.

Solution

a) L'administration emploie 20 % de C.D.D., donc
$P(D) = 0{,}2$.
60 % des C.D.D. ont moins de 30 ans, donc
$P_D(J) = 0{,}6$.
30 % des C.D.I. ont moins de 30 ans, donc
$P_{\overline{D}}(J) = 0{,}3$.

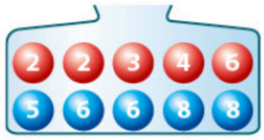


Pour étudier de telles situations, on les représente à l'aide d'un arbre pondéré. On reporte sur les branches les probabilités connues puis on complète par les probabilités sur les autres branches.

b) « L'employé est en C.D.D. et a moins de 30 ans » est l'événement $D \cap J$.
Sa probabilité est $P(D \cap J) = P(D) \times P_D(J) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$.

Indépendance d'événements

On prélève au hasard une boule de l'urne ci-contre et on considère les événements A : « La boule prélevée est rouge » et B : « La boule prélevée porte un numéro impair ».
Justifier que les événements A et B sont indépendants.



Solution

- Il y a cinq boules rouges dans l'urne donc $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.
- Deux boules portent des numéros impairs (3 et 5) donc $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
- L'événement $A \cap B$ est réalisé par le tirage d'une boule rouge portant un numéro impair (c'est la boule 3).

Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

- Or, $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$.

Ainsi, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

Pour démontrer que les événements A et B sont indépendants :
– on détermine les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$;
– on compare le produit $P(A) \times P(B)$ à $P(A \cap B)$;
– en cas d'égalité, A et B sont indépendants. Sinon ils sont **dépendants**.

Haut du document

Exercice 1

Une agence de voyage propose deux formules week-end pour se rendre à Londres au départ de Nantes. Les clients choisissent leur moyen de transport : train ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

* 40 % des clients optent pour l'avion ;
* parmi les clients ayant choisi le train, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées ».
* 12 % des clients ont choisi à la fois l'avion et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres.
On considère les évènements suivants :

* A : « le client a choisi l'avion » ;
* V : « le client a choisi l'option « visites guidées ».

1. Déterminer $P_A(V)$.

2. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.

3. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.

4. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ?

Exercice 2

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

* une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin »
* des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil »

Il apparaît que 40 % des clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 30 % des clients demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 24 % des clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ».
On interroge un client au hasard.
On notera C l'évènement « Le client souhaite une "couleur-soin." ».
On notera E l'évènement « Le client souhaite un "effet coup de soleil." ».

1. Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_{\overline{C}}(E)$.

2. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».

3. Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à 0,42.

4. Les évènements C et E sont-ils indépendants ?

Haut du document

Exercice 3

Un jeu consiste à combattre en duel soit un monstre A, soit un monstre B.

On a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'affronter le monstre A.

Le joueur gagne contre le monstre A dans 30 % des cas, et gagne contre le monstre B dans 25 % des cas.
Le joueur lance une partie.
On considère les évènements :
* A : « Le joueur affronte le monstre A » ;
* B : « Le joueur affronte le monstre B » ;
* V : « Le joueur est victorieux ».

1. Déterminer $P_B\left(\overline{V}\right)$ et interpréter le résultat.

2. Montrer que $P\left(B \cap V\right) = \frac{1}{20}$.

3. Calculer $P\left(V\right)$.

4. Calculer la probabilité d'avoir combattu le monstre B sachant que le joueur est victorieux.

Exercice 4

Une entreprise de 1000 employés est organisée en 3 services « A », « B » et « C » d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête effectuée auprès de tous les employés sur leur temps de parcours quotidien entre leur domicile et l'entreprise a montré que :
* 40 % des employés du service « A » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
* 20 % des employés du service « B » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;
* 80 % des employés du service « C » résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

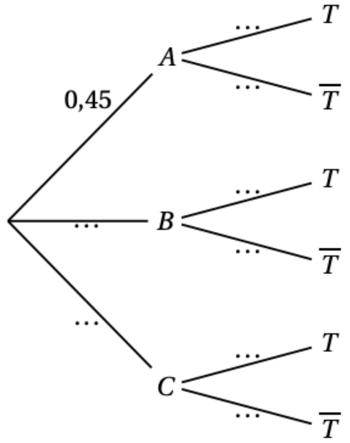
On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :
* A : l'employé fait partie du service « A » ;
* B : l'employé fait partie du service « B » ;
* C : l'employé fait partie du service « C » ;
* T : l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité d'un événement E est notée $P\left(E\right)$ et celle de E sachant F est notée $P_F\left(E\right)$.

Haut du document

1. Justifier que $P(A)=0{,}45$ puis donner $P_A(T)$.

2. Compléter l'arbre pondéré suivant :



3. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service « A »et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.

4. Montrer que $P(T)=0{,}482$.

5. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service « C ». Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice 5

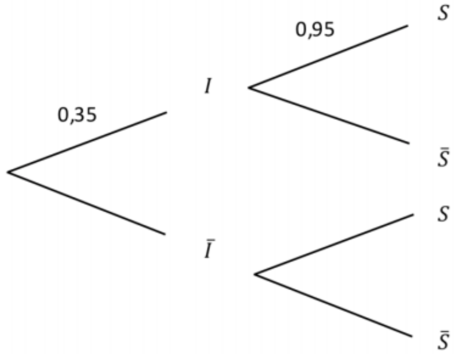
Laura reçoit chaque jour beaucoup de courriels. Pour se protéger des courriels indésirables, elle achète un logiciel anti-spam. Chaque jour, 35 % des courriels reçus par Laura sont indésirables ; 95 % des courriels indésirables sont automatiquement bloqués par le logiciel anti-spam. Parmi les courriels qui ne sont pas indésirables, le logiciel anti-spam en bloque 2 %.
On choisit au hasard un courriel reçu par Laura. Chaque courriel a la même probabilité d'être choisi.
On considère les événements suivants :

* I : « le courriel choisi est indésirable »,
* S : « le logiciel anti-spam bloque le courriel choisi ».

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A.
Pour tout événement A et B avec B un événement de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant B est notée $p_B(A)$.

Haut du document

1. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité traduisant la situation.



2. Calculer la probabilité que le courriel reçu par Laura ne soit pas indésirable et soit bloqué par le logiciel anti-spam.

3. Montrer que $p(S) = 0{,}3455$.

4. Le logiciel anti-spam a bloqué un courriel reçu par Laura. Calculer la probabilité que ce courriel soit indésirable. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

5. Le fournisseur du logiciel anti-spam affirme que son logiciel se trompe dans moins de 2 % des cas. Est-ce vrai ? Justifier votre réponse.

Exercice 6

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.
L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour. Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.
On choisit un enfant au hasard parmi les enfants des écoles primaires de la ville et on considère les événements suivants :

* B : « l'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »,

* S : « l'enfant est en surpoids ».

Les événements contraires de B et de S sont notés respectivement $\overline{B}$ et $\overline{S}$.
Pour tout événement A et B, avec B un événement de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant B est notée $p_B(A)$.

1. Justifier que $p_B(S) = 0{,}125$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. Calculer $p(B \cap S)$.

4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.

5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.

Haut du document

Exercice 7

Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :
* si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
* si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :
* B l'évènement : « l'angine est bactérienne » ;
* T l'évènement : « le test effectué sur le malade est positif ».

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et que le test soit positif ?

3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.

4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

Exercice 8

92 Modifier un approvisionnement 40 min

D'après Bac 2018, Pondichéry

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.
Le sucre extrafin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extrafin ».
Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extrafin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extrafin.
On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.
On considère les événements suivants :
U (resp. V) : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U (resp. V) » ;
E : « Le paquet porte le label extrafin ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.
a) Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label extrafin ?
b) Sachant qu'un paquet porte le label extrafin, quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de U ? *Arrondir au millième.*

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label extrafin, 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.
Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Haut du document

06 – Fonction exponentielle

Rappel de cours

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$

Elle est notée e^x, avec $e \approx 2{,}718$ à 10^{-3} près.

Propriétés

1. $e^{x+y} = e^x \times e^y$ **2.** $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ **3.** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ **4.** $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$.

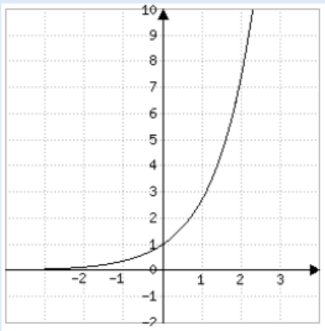
Signe et variations

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$(\exp x)'$		+	
$\exp x$	0	↗	$+\infty$

Représentation graphique



Équations – Inéquations

Pour tout réel x et y :

1. $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$ **2.** $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$.

Dérivation

$\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$

Haut du document

Dérivation d'un produit avec exponentielle

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^x$.

Solution

f est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto x+2$ et $v : x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x+2 \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \times e^x + (x+2) \times e^x$

$f'(x) = (1+(x+2))e^x = (x+3)e^x$

On utilise la formule de dérivée : $\exp'(x) = e^x$

On factorise par le facteur commun e^x.

Dérivation exponentielle

Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^{5x}$ **b)** $g(x) = 6{,}7e^{-0{,}1x}$

Solution

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 5 \times e^{5x} = 5e^{5x}$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = 6{,}7 \times (-0{,}1) \times e^{-0{,}1x} = -0{,}67e^{-0{,}1x}$$

On utilise le fait que si $f(x) = e^{ax+b}$, alors $f'(x) = ae^{ax+b}$.

Exercice 3

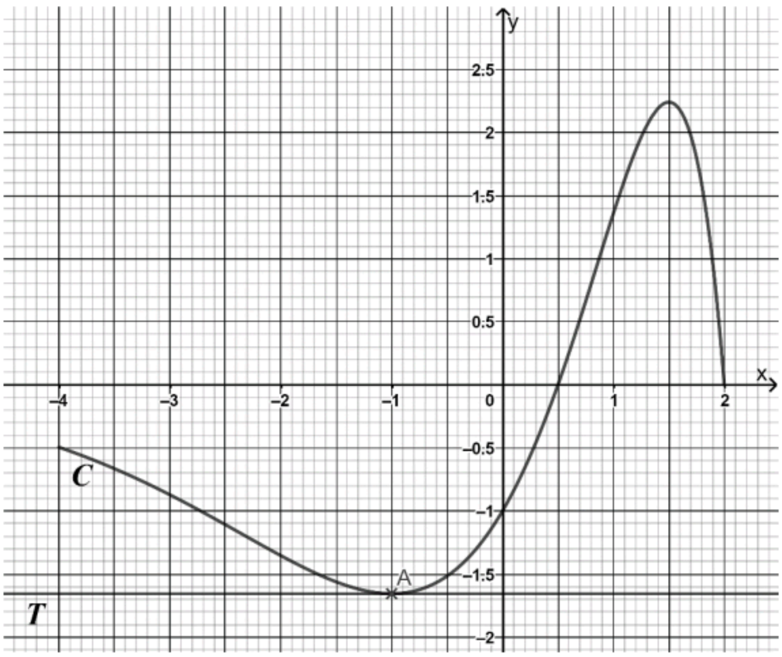
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;2]$.

La fonction dérivée de f est notée f'.

Dans le repère orthonormé ci-dessous, la courbe C est la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4;2]$.

Le point A est le point de la courbe C d'abscisse -1.

La droite T est la tangente à la courbe C en A.



Haut du document

1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.

2. Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f'(x) \leq 0$. On admet que la fonction *f* est définie sur $[-4;2]$ par $f(x) = (-x^2 + 2{,}5x - 1)e^x$.

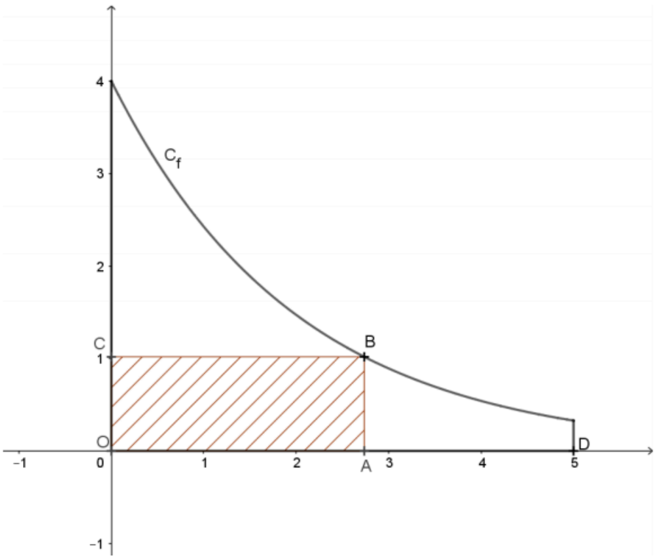
3. Vérifier que, pour tout réel *x* de l'intervalle $[-4;2]$, $f'(x) = (-x^2 + 0{,}5x + 1{,}5)e^x$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[-4;2]$.

5. En déduire les variations de *f* sur l'intervalle $[-4;2]$.

Exercice 4

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe C_f représentative de la fonction *f* définie sur $[0;5]$ par $f(x) = 4e^{-0{,}5x}$.



L'enclos est représenté par le rectangle *OABC* où *O* est l'origine du repère et *B* un point de C_f, *A* et *C* étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

On note *x* l'abscisse du point *A* et *D* le point de coordonnées $(5;0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point *A* sur le segment $[OD]$ permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de *x* par $g(x) = xe^{-0{,}5x}$ pour *x* dans l'intervalle $[0;5]$.

Haut du document

2. La fonction g est dérivable sur $[0;5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$, on a $g'(x)=(4-2x)e^{-0,5x}$.

3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0;5]$.

4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ? Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm².

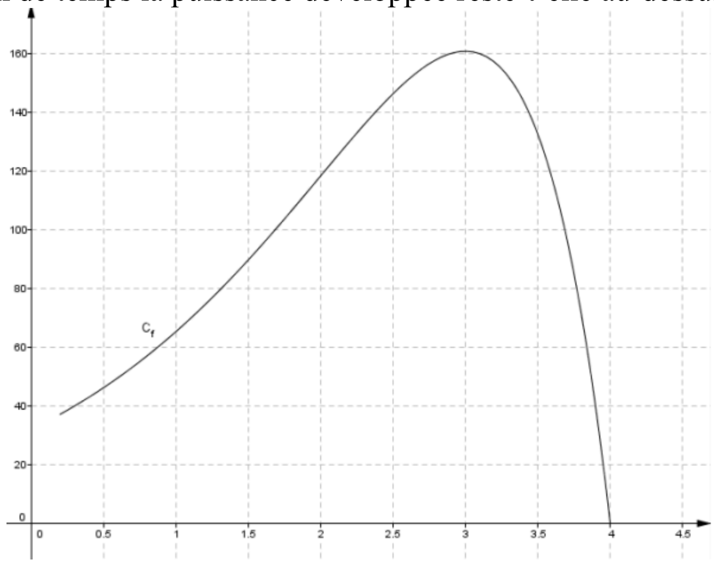
Exercice 5

Un rameur est une machine d'exercice physique simulant les mouvements d'une personne qui fait de l'aviron.
Il est souvent utilisé pour l'entraînement sportif afin d'améliorer sa condition physique.
La courbe ci-dessous représente la puissance (en Watt) en fonction du temps (en dixième de seconde) développée par un rameur débutant.

Partie A : Répondre par lecture graphique aux deux questions suivantes

1. Quelle est la puissance maximale atteinte par ce rameur ?

2. Pendant combien de temps la puissance développée reste-t-elle au-dessus de 100 Watts ?



Partie B : Modélisation par une fonction

On suppose que la courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,2;4]$ par : $f(x)=(-8x+32)e^{x}$
On note f' la fonction dérivée de f.
On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0,2;4]$, $f'(x)=(-8x+24)e^{x}$

1. Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0,2;4]$.

Haut du document

2. Déterminer la valeur exacte du maximum de la fonction *f*.

3. On suppose que le sportif améliore sa meilleure performance de 5 % tous les mois.
Combien de mois d'entrainement seront-ils nécessaires pour qu'il dépasse les 200 watts ?

Exercice 6

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de *x* centaines de litres est donné par la fonction *R* définie par :
$R(x)=(5x-30)e^{-0,25x}$, pour tout réel $x\in[2;20]$.

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.

2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).

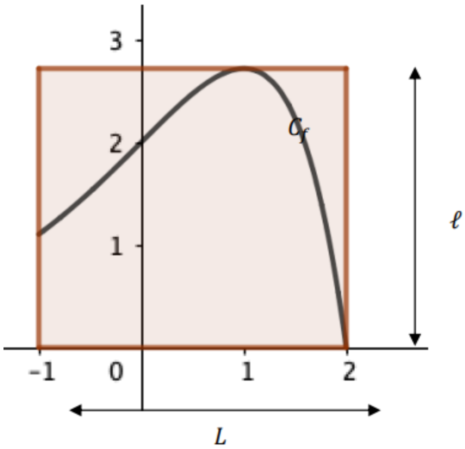
3. Résoudre l'inéquation $R(x)\geq 0$, d'inconnue *x*. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

4. On note R' la dérivée de la fonction *R*.
Un logiciel de calcul formel donne : $R'(x)=(-1,25x+12,5)e^{-0,25x}$.
En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Exercice 7

Une entreprise de menuiserie réalise des découpes dans des plaques rectangulaires de bois. Dans un repère orthonormé d'unité 30 cm ci-dessous, on modélise la forme de la découpe dans la plaque rectangulaire par la courbe C_f représentative de la fonction *f* définie sur l'intervalle $[-1;2]$ par

$$f(x)=(-x+2)e^{x}$$



Haut du document

Le bord supérieur de la plaque rectangulaire est tangent à la courbe C_f. On nomme L la longueur de la plaque rectangulaire et ℓ sa largeur.

1. On note f' la fonction dérivée de f.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-1;2]$, $f'(x)=(-x+1)e^x$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[-1;2]$.

2. La longueur L de la plaque rectangulaire est de 90 cm.
Trouver sa largeur ℓ exacte en cm.

Exercice 8

120 Étudier une température 35 min

D'après Bac Métropole, 2017

Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS (graphite sphéroïdal) qui sont utilisées dans l'industrie automobile. Ces pièces sont coulées dans des moules de sable à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C.

Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.

La température en degré Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, en h, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 1\,370e^{-0{,}065t} + 30$$

1. Calculer la température de la pièce à la sortie du four.

2. a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 h dans le local ?
Justifier par un calcul.

4. Déterminer au bout de combien de temps, en h, au minimum la pièce pourra être démoulée. *Arrondir à la minute.*

5. a) La pièce de fonte peut-elle atteindre une température de 25 °C ?
Justifier par un calcul.

b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

Haut du document

07 – Géométrie repérée

Rappel de cours

Colinéarité

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

Équation cartésienne de droite

Une équation cartésienne de la droite d est de la forme $ax + by + c = 0$.

Vecteur directeur

La droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Vecteur normal

La droite d a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Cercle

Une équation du cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r est : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Haut du document

Équation cartésienne de droite

Dans un repère orthonormé, d est la droite d'équation $2x+3y+5=0$ et A est le point de coordonnées $(2\,;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite d.

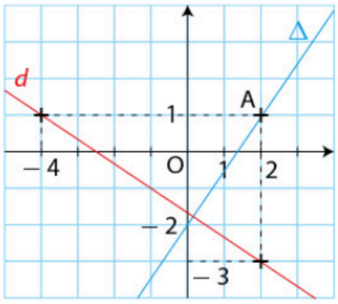
Solution

La droite Δ est perpendiculaire à la droite d donc un vecteur normal à Δ est un vecteur directeur de d.
Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(-3\,;2)$.
Donc une équation cartésienne de Δ est de la forme :

$$-3x+2y+c=0$$

Or, A appartient à Δ donc $-3\times2+2\times1+c=0$ et $c=4$.
Ainsi une équation cartésienne de Δ est :

$$-3x+2y+4=0$$



Reconnaître un ensemble

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2-3x+4y=1$.
Quelle est la nature de cet ensemble $\mathscr{E}$?

Solution

On utilise la méthode de complétion du carré :

- « Les termes en x » : $x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$.
- « Les termes en y » : $y^2+4y=(y+2)^2-2^2=(y+2)^2-4$.

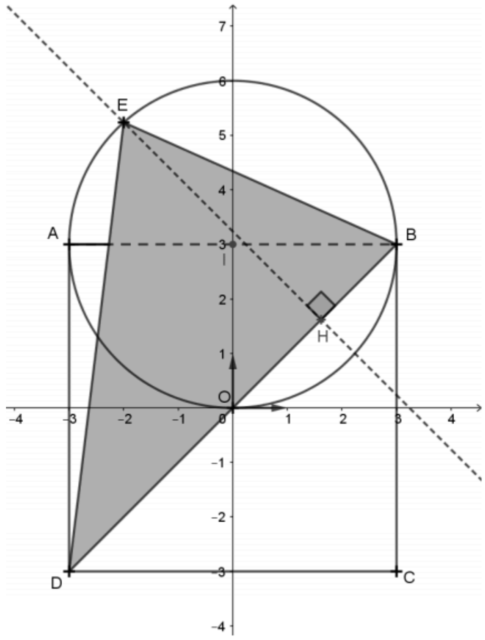
Ainsi, $M(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si,
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+(y+2)^2-4=1$, c'est-à-dire $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\dfrac{29}{4}$.
Donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $A\left(\dfrac{3}{2}\,;-2\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

L'idée consiste à présenter l'équation :
$x^2+y^2-3x+4y=1$
sous la forme :
$(x-a)^2+(y-b)^2=k$
Lorsque $k\geqslant 0$, l'ensemble cherché est un cercle de centre $A(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$.

Haut du document

Exercice 1

Le logo d'une entreprise est constitué d'un carré, d'un cercle et d'un triangle. Il a été représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



On donne les coordonnées des sommets du carré : $A(-3;3)$, $B(3;3)$, $C(3;-3)$, $D(-3;-3)$.
On considère le point $E\left(-2;3+\sqrt{5}\right)$. On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne $x+y-\left(1+\sqrt{5}\right)=0$.

3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).

4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).

5. Montrer que $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}=42+6\sqrt{5}$. On admet que $\left\|\overrightarrow{DE}\right\|=\sqrt{42+12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BDE}$ au degré près.

Haut du document

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point A de coordonnées $(3;1)$ ainsi que la droite (d) d'équation cartésienne $x-3y-4=0$.

1. Déterminer les coordonnées du point B d'abscisse 7 appartenant à la droite (d).

2. Donner un vecteur normal à la droite (d).

3. Déterminer une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A.

4. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (d).

5. Calculer la distance AH et en donner une interprétation.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points : $A(-1;-3)$, $B(1;2)$ et $C(7;1)$.

1. Le triangle ABC est-il isocèle en B ?

2. Déterminer la valeur arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{ABC}$.

3. On considère le point H de coordonnées $(2{,}6;-1{,}2)$. Le point H est-il le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) ?

Haut du document

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(-3;1)$, $B(3;5)$ et $C(7;1)$ dans ce repère.

Le but de cet exercice est de déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle *ABC* et le rayon de ce cercle.

On rappelle que le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

1. Placer les points *A*, *B* et *C* dans le plan puis construire le cercle circonscrit au triangle *ABC*.

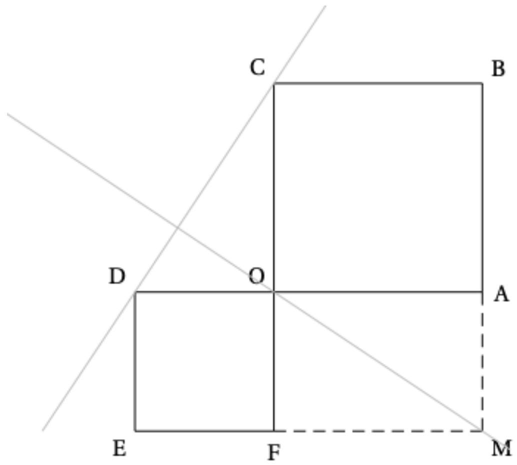
2. Vérifier que la droite Δ d'équation $3x+2y-6=0$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

3. Déterminer les coordonnées du point B', milieu du segment $[AC]$.

4. Déterminer les coordonnées du point *I*, centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*.

5. Calculer une valeur exacte du rayon du cercle circonscrit au triangle *ABC*.

Exercice 5



OABC et *ODEF* sont des carrés de côtés respectifs 3 et 2.

OAMF est un rectangle.

On note *H* le projeté orthogonal du point *M* sur la droite (DC).

Dans cet exercice, on pourra, si on le souhaite, se placer dans le repère $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$.

1. La droite (OM) est-elle perpendiculaire à la droite (DC) ?

2. Calculer $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CM}$.

3. Déterminer la longueur *CH*.

Haut du document

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A\left(4;-1\right)$, $B\left(3;4\right)$ et $C\left(-1;1\right)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. a. Soit *D* le projeté orthogonal du point *C* sur la droite $\left(AD\right)$, justifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire la longueur *AD*.

3. Déterminer la hauteur du triangle *ABC* issue de *C*.

4. Calculer l'aire du triangle *ABC*.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé on considère le point $A\left(-3;5\right)$ et la droite $\left(d\right)$ dont une équation cartésienne est $-x+3y+2=0$.

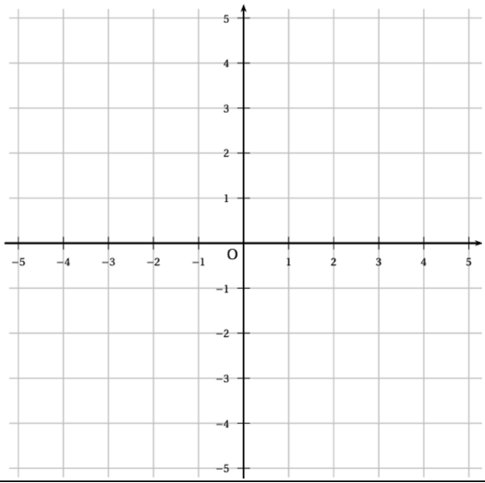
1. Tracer la droite $\left(d\right)$ dans le repère donné en annexe 1 à rendre avec la copie.

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite $\left(d\right)$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à $\left(d\right)$ et passant par *A*.

4. En déduire que le point *H*, projeté orthogonal de *A* sur la droite $\left(d\right)$, a pour coordonnées $\left(-1;-1\right)$.

5. En déduire la distance entre le point *A* et la droite $\left(d\right)$.



Haut du document

Exercice 8

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation cartésienne $4x+5y-7=0$.
Un vecteur normal à D a pour coordonnées :
a. $(5;4)$ **b.** $(-5;4)$ **c.** $(4;5)$ **d.** $(4;-5)$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble E des points M de coordonnées $(x;y)$ vérifiant : $x^2-2x+y^2=3$ est un cercle :
a. de centre $A(1;0)$ et de rayon 2. **b.** de centre $A(1;0)$ et de rayon 4.

c. de centre $A(-1;0)$ et de rayon 2. **d.** de centre $A(-1;0)$ et de rayon 4.

3. Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(4;7)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ a pour équation :
a. $3x+y-19=0$ **b.** $3x+y+19=0$

c. $-x+3y+17=0$ **d.** $-x+3y-17=0$

4. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère l'équation de cercle $x^2-4x+(y+3)^2=3$.
Son centre a pour coordonnées :
a. $(-2;-3)$ **b.** $(2;-3)$ **c.** $(-4;3)$ **d.** $(4;-3)$

5. Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;2)$, $B(2;6)$.
Une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ est :
a. $x=3$ **b.** $x-2y+5=0$

c. $x+2y-11=0$ **d.** $y=0,5x+3$

Haut du document

08 – Trigonométrie

Rappel de cours

Mesure principale

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Cosinus et sinus

* Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos x$.
* Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin x$.

Propriétés

1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3. $\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

4. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

5. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ où k entier relatif

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Angles associés

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$

$\sin(x + \pi) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Haut du document

Fonctions trigonométriques

$\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ où k entier relatif.
Donc les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

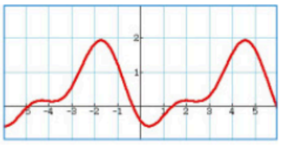
$\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$.
Donc la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

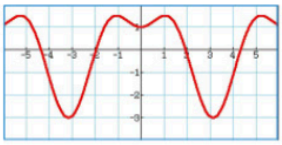
Parité d'une fonction trigonométrique

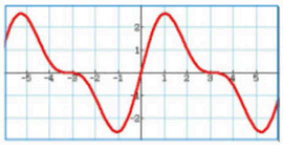
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin(x)+\sin(2x)$.

a) Étudier la parité de la fonction *f*.

b) La courbe de la fonction *f* est affichée sur l'un des écrans ci-dessous. Lequel ?

❶


❷


❸


Solution

a) Pour tout nombre réel x,

$f(-x)=2\sin(-x)+\sin(-2x)$

$f(-x)=-2\sin(x)-\sin(2x)=-f(x)$

f est donc une fonction impaire.

> $\mathbb{R}$ est un ensemble symétrique par rapport à 0, donc pour étudier la parité de *f*, il suffit de déterminer $f(-x)$ et de comparer à $f(x)$ ou $-f(x)$.

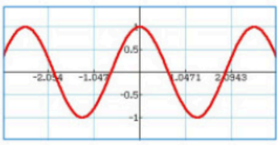
b) *f* est une fonction impaire donc sa courbe représentative dans un repère est symétrique par rapport à l'origine du repère. Donc la courbe de *f* est affichée sur l'écran ❸.

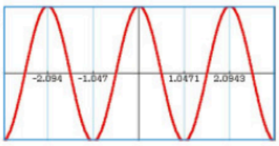
Périodicité d'une fonction trigonométrique

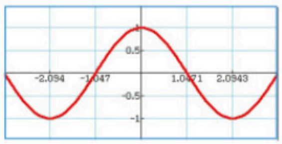
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(3x)$.

a) Démontrer que *f* est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

b) La courbe de *f* est affichée sur l'un des écrans ci-dessous (*fenêtre* : $-\pi\leqslant X\leqslant\pi$, pas $\frac{\pi}{3}$ et $-1\leqslant Y\leqslant 1$, pas 1). Lequel ?

❶


❷


❸


Solution

a) Pour tout nombre réel x,

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(3x+3\times\frac{2\pi}{3}\right)=\cos(3x+2\pi)=\cos(3x)=f(x)$$

Donc la fonction *f* est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

b) Une graduation en abscisse représente $\frac{\pi}{3}$ donc la partie de la courbe qui se « répète » doit être tracée sur deux graduations, ce qui est le cas de l'écran ❷.

> On cherche deux points de la courbe qui ont la même ordonnée et qui ont leurs abscisses qui diffèrent de $\frac{2\pi}{3}$ donc de deux graduations.

Haut du document

Exercice 3

Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure en radians est :

$\frac{23\pi}{4}$; $-\frac{50\pi}{6}$; $\frac{1975\pi}{8}$; $\frac{127\pi}{4}$; $\frac{2020\pi}{3}$

Exercice 4

Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$:

$$A = \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$B = \sin(-x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-\pi - x)$$

Exercice 5

On veut résoudre l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation dans $]-\pi;\pi]$.

2. Quelles sont les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$?

Exercice 6

1. Donner un encadrement de $\cos(x)$ pour tout réel x.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3+2\cos(x)}{5}$

a. Montrer que $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour x dans l'intervalle $[0;2\pi[$. (On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.)

c. En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel de l'intervalle $[0;\pi]$ tel que $f(x) = \frac{4}{5}$. Le déterminer.

4. a. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π. Comment cela se traduit-il sur la représentation graphique de f ?

b. Étudier la parité de f. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

5. À l'aide de la calculatrice et des résultats des questions précédentes, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

Haut du document

Exercice 7

Dans chaque cas, donner la bonne réponse.

		A	B	C	D
1	La fonction sinus est …	paire	impaire	ni paire, ni impaire	paire et impaire
2	La fonction cosinus est périodique de période …	2	$-\pi$	π	2π
3	Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus admet un axe de symétrie d'équation …	$x=-2\pi$	$x=-\pi$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$x=3\pi$
4	f est la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0\,;\pi]$ par : $f(x)=3-2\cos(x)$. Alors f est …	croissante sur I	décroissante sur I	constante sur I	nulle sur I
5	Sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, les solutions de l'équation $\sin(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont …	$-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$

Exercice 8

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)$. Alors f est …	croissante sur $[0\,;\pi]$	croissante sur $[-\pi\,;0]$	décroissante sur $[2\pi\,;3\pi]$	décroissante sur $[-\pi\,;0]$
2	g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\cos(x)\sin(x)$ Alors g est périodique de période …	2π	$\frac{\pi}{2}$	π	3π
3	h est la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=\cos(x)-\sin(x)$. Alors pour tout nombre réel x, …	$h(x)\geqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]$	$h(x)=0$ pour $x=\frac{\pi}{4}$	$h(x)\leqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$	$h(x)>0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}\right[$
4	Sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, les solutions de l'équation $2\cos(x)+\sqrt{3}=0$ sont …	$-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

Haut du document

Exercice 9

81 **Distance maximum entre deux courbes** 45 min

D'après Bac 2015 Polynésie

On admet que pour tout nombre réel θ :

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

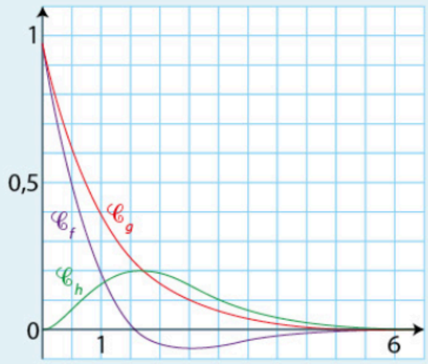
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

On définit la fonction h sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données ci-dessous.



1. Conjecturer :

a) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;

b) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximum.

2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. On admet que la fonction h est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$$

a) Justifier que sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$$

et que sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$$

b) En déduire le tableau de variations de h sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ et la valeur exacte de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximum.

Haut du document

09 – Variable aléatoire

Rappel de cours

Variable aléatoire

Une variable aléatoire X est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Loi de probabilité

La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	…	$P(X = x_n)$

Espérance

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

L'espérance correspond à la valeur moyenne que prend la variable aléatoire X.

Variance

$$V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \dots p_n\left(x_n - E(X)\right)^2$$

Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

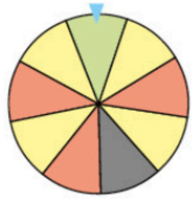
Propriétés

- $V(X) = p_1 \times x_1^{\ 2} + p_2 \times x_2^{\ 2} + \dots + p_n \times x_n^{\ 2} - E(X)^2$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$ $\quad V(aX + b) = a^2 V(X)$ $\quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

Haut du document

Déterminer une loi de probabilité

On fait tourner la roue équilibrée ci-contre, qui est découpée en neuf secteurs superposables. Le montant gagné dépend de la couleur obtenue : 100 € pour le secteur vert, 10 € pour un secteur rouge, 2 € pour un secteur jaune et 0 € pour le secteur noir.
X est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu.
Déterminer la loi de probabilité de X.



Solution

Les neuf secteurs sont superposables donc on modélise cette expérience aléatoire par une loi équirépartie.
Les valeurs prises par X sont 100, 10, 2 et 0.
Calcul de $P(X = 10)$: on gagne 10 € si la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs rouges.

$$P(X = 10) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

On procède de même dans les autres cas pour obtenir la loi de probabilité de X :

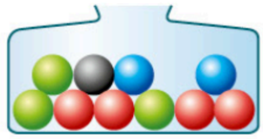
a	0	2	10	100
$P(X = a)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pour déterminer $P(X = a)$, il faut revenir à l'expérience aléatoire et déterminer les issues qui réalisent l'événement $\{X = a\}$.

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1.

Calculer une espérance

On tire au hasard une boule dans l'urne dessinée ci-contre.
Si la boule tirée est verte, on gagne 8 points, si elle est bleue on gagne 1 point, sinon on perd 3 points. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus. Calculer et interpréter l'espérance de X.



Solution

Voici la loi de probabilité de X.

a	-3	1	8
$P(X = a)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = \frac{5}{10} \times (-3) + \frac{2}{10} \times 1 + \frac{3}{10} \times 8 = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

Cela signifie que, pour un grand nombre de tirages, on peut espérer gagner en moyenne 1,1 point par tirage.

Il y a 10 boules dans l'urne, dont 3 vertes et 2 bleues.

Laisser les probabilités sur le même dénominateur simplifie le calcul de l'espérance

Calculer une variance et un écart type

On reprend la situation de l'exercice 7.
Déterminer la variance et l'écart-type de X. *Arrondir au centième si besoin.*

Solution

À l'exercice 7, on a déterminé la loi de probabilité de X et son espérance. Pour calculer la variance de X, on complète le tableau ci-dessous.

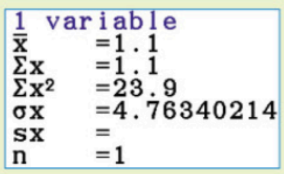
a	-3	1	8
$a - 1{,}1$	$-4{,}1$	$-0{,}1$	6,9
$(a - 1{,}1)^2$	16,81	0,01	47,61
$P(X = a)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$

La variance de X est donc :

$$V(X) = \frac{5}{10} \times 16{,}81 + \frac{2}{10} \times 0{,}01 + \frac{3}{10} \times 47{,}61 = 22{,}69$$

L'écart-type de X est donc $\sigma(X) = \sqrt{22{,}69}$ soit $\sigma(X) \approx 4{,}76$.

On peut vérifier ces résultats en utilisant le menu Statistiques de la calculatrice.
L'écart-type est noté σx.
La variance n'apparaît pas toujours, il faut calculer σx^2.



Exercice 4

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Jacob marque avec une probabilité de 0,7.
Jacob effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les évènements :

* M : « Jacob marque un but » ;
* R : « Jacob rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Jacob sont indépendants.
1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Jacob.
a. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Jacob ; chaque but marqué par Jacob lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Jacob ne lui rapporte rien.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.
a. Exprimer Y en fonction de X.

b. Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 5

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses 5000 clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

* une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin » ;
* des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 2000 clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 900 demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 650 clients demandent une « couleur soin »et un « effet coup de soleil ».
On notera C l'évènement « le client souhaite une « couleur-soin ».
On notera E l'évènement « le client souhaite un « effet coup de soleil ».
1. Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

	C	$\overline{C}$	Total
E		900	
$\overline{E}$			
Total			5 000

Haut du document

2. On interroge un client au hasard parmi les 5000 clients.
a. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les deux prestations : « couleur soin » et « effet coup de soleil » ?

b. Calculer $P_E\left(\overline{C}\right)$.

3. On a des prix différents suivant la prestation fournie. On appelle X le prix payé en euros par chaque client.

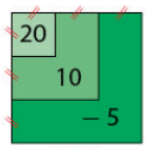
	Coupe seule	Coupe avec « couleur soin »	Coupe avec « effet coup de soleil »	Coupe avec « couleur soin » et « effet coup de soleil »
Valeurs de k en €	20	50	65	80
$P(X = k)$			0,18	0,13

Après avoir recopié et complété le tableau, calculer l'espérance de X.

Exercice 6

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

On laisse tomber au hasard une bille sur la plaque ci-contre. On admet que la bille se pose distinctement sur l'un des domaines colorés. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points correspondant au secteur sur lequel la bille s'est posée.



		A	B	C	D
1	$P(X = 10)$ est égal à …	3	$\frac{1}{3}$	$2 \times P(X = -5)$	10
2	$P(X \geqslant 0)$ est égal à …	10 ou 20	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	4
3	$E(X)$ est égal à …	25	0	$\frac{25}{9}$	2,5
4	$V(X)$ est environ égal à …	83,95	$\frac{625}{81}$	625	9,16
5	$\sigma(X)$ est environ égal à …	2,78	9,16	$E(X)$	$V(X)$

Haut du document

Exercice 7

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

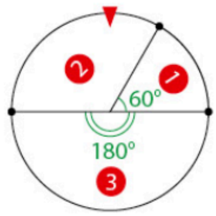
Un sac contient 1 jeton rouge, 3 jetons blancs et n jetons noirs (n nombre entier supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire au hasard un jeton. Il gagne 10 € s'il tire le jeton rouge, 5 € s'il tire un jeton blanc, sinon rien.
La mise initiale est de m € (m nombre réel supérieur ou égal à 1).
X est la variable aléatoire qui donne le gain, éventuellement négatif, du joueur.

		A	B	C	D
1	On suppose que $m = 1$. Alors $P(X = -1)$ est égal à …	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{n}{4+n}$	$n \times P(X = 9)$
2	On suppose que $m = 1$. Alors $E(X)$ est égal à …	0	-1	$\frac{21-n}{4+n}$	$21 - n$
3	On suppose que $n = 16$. Alors $P(X = -m)$ est égal à …	$\frac{1}{9}$	$0{,}8$	$\frac{m+1}{5-m}$	$\frac{16}{20}$
4	On suppose que $n = 16$. Le jeu est équitable si …	$E(X) = 0$	$m = 1{,}25$	$m = 0{,}25$	$m < 1{,}25$

Exercice 8

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

On fait tourner la roue ci-contre. X est la variable aléatoire qui donne le produit du numéro obtenu (1, 2 ou 3) par 10.



Affirmations :

1. $P(X = 10) = P(X = 20) = P(X = 30) = \frac{1}{3}$
2. $P(X = 10) + P(X = 20) = P(X = 30)$
3. $E(X) = 20$
4. $V(X) = \frac{500}{9}$
5. $\sigma(X) = \frac{10}{3}\sqrt{5}$

Exercice 9

98 Tirages sans remise 20 min

D'après sujet Bac 2006, Polynésie

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

1. Utiliser un arbre pondéré pour représenter cette expérience aléatoire.

2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Calculer $P(X = 0)$.

c) Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.

d) En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

e) Déterminer la loi de probabilité de X.

f) Calculer et interpréter $E(X)$.

Haut du document