Cahier de vacances de première à terminale
Mathématiques

TABLE DES MATIERES

01 – Polynôme du second degré

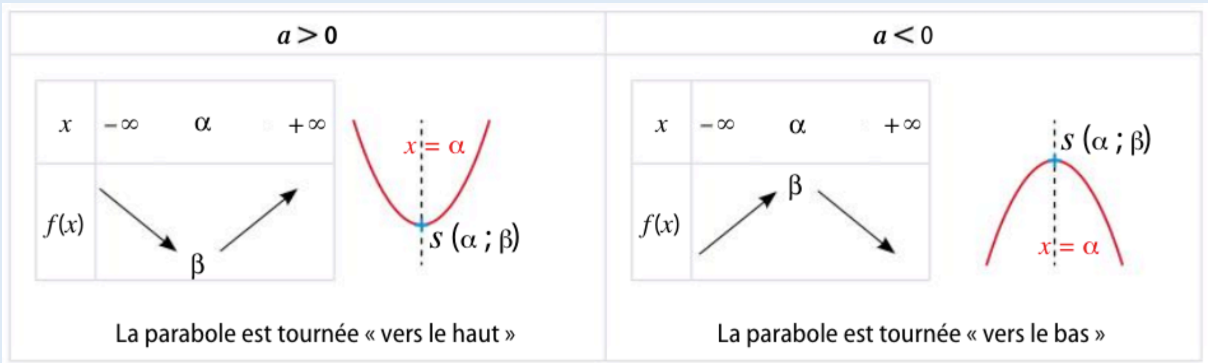
Rappel de cours

Forme canonique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

Sa corme canonique est $f\left(x\right) = a\left(x-\alpha\right)^2 + \beta$, où $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f\left(\alpha\right)$.

Variations



<u>Discriminant</u>

$\Delta = b^2 - 4ac$

Résolution d’équation du second degré

* Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
* Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c$ a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
* Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

<u>Somme et produit de racines</u>

Soit x_1 et x_2 les racines du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$. On a alors :

* La somme des racines : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
* Le produit des racines : $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Haut du document

Factorisation

*	Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

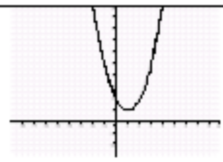
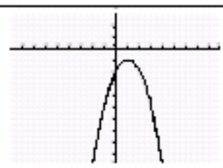
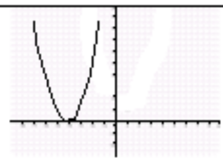
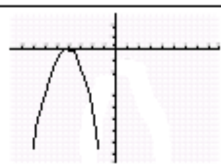
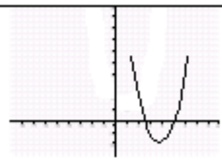
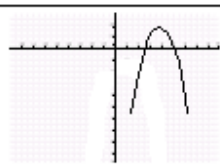
*	Si $\Delta = 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x - x_0\right)^2$.

*	Si $\Delta > 0$, on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$

<u>**Signe d'un trinôme**</u>

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines, lorqu'elles existent.

Résumé

	Résolution de l'équation	Factorisation de $a\,x^2 + b\,x + c$	Parabole représentant la fonction polynôme $a > 0$	Parabole représentant la fonction polynôme $a < 0$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation sous forme de produit de deux facteurs du premier degré.		
			f est du signe de a	
$\Delta = 0$	Une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$a\,(x - x_0)^2$		
			f est du signe de a	
$\Delta > 0$	Deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$		
			f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines ;	

Haut du document

Intersection entre deux courbes

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ et sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

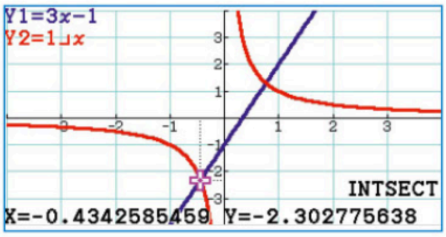
a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs abscisses.

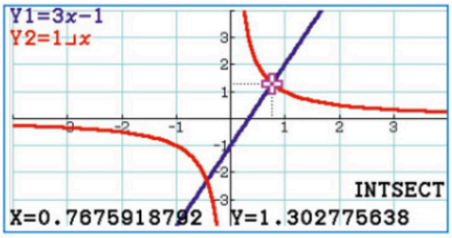
b) Déterminer algébriquement les abscisses exactes des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise à la question **a)**.

Solution

a) On conjecture que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2 avec $x_1 \approx -0{,}43$ et $x_2 \approx 0{,}77$.





b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire $3x - 1 = \frac{1}{x}$.

Dans $\mathbb{R}^*$, cette équation équivaut à $(3x-1)x = 1$, c'est-à-dire $3x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 1 + 12 = 13$.

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2.

On peut vérifier qu'effectivement $x_1 \approx -0{,}43$ et $x_2 \approx 0{,}77$.

Exercice 1

Donner la forme canonique des trinômes suivants :

a. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ **b.** $g(x) = \frac{4}{3}x^2 - 24x + 1$ **c.** $2x^2 + 7x + 6$

d. $-4x^2 + 4x - 1$ **f.** $x^2 - 6x - 7$ **g.** $x^2 - 5x + 7$

h. $x^2 + 50x + 625$

Exercice 2

Donner le tableau de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = 3 - (x+2)^2$ $g(x) = 2x^2 + 4x - 3$

Haut du document

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a. $3x^2+x-2=0$ **b.** $4x^2-12x+9=0$ **c.** $x^2-2x+5=0$

d. $5x^2+2x-7=0$ **e.** $x(3x-5)=2$ **f.** $(x-1)(x+2)=1-x(x-6)$

g $(x+1)^2=x+3$ **h.** $x+\frac{1}{x}=2$ **i.** $\frac{1}{x-1}=2x$

j. $x(4-x)=1$

Exercice 4

1. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=64 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x+y=22 \\ xy=121 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \\ xy=6 \end{cases}$

2. Existe-t-il un rectangle dont le périmètre est 40 m et l'aire 40 m^2 ?

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-5x(3-x)\leq 0$ **2.** $8x^2+x>0$ **3.** $x^2-6x+5\leq 0$

4. $x^2-12x+32>0$ **5.** $2(x+1)^2-3x\geq 3$ **6.** $3x+\frac{1}{2x}\leq\frac{5}{2}$

Exercice 6

Soit la fonction polynôme *P* définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=-3x^2-9x+84$.

1. Déterminer les racines de *P* et factoriser $P(x)$.

2. Donner $P(x)$ sous forme canonique.

3. Déterminer le signe de *P*.

4. a. Donner les coordonnées du point d'intersection de la courbe de *P* et de l'axe des ordonnées.

b. Donner les coordonnées du point d'intersection de la courbe de *P* et de l'axe des abscisses.

Haut du document

Exercice 7

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation suivante : $(m-1)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$

1. Pour quelle valeur de *m* cette équation est-elle du second degré ?

2. On suppose $m \neq 1$. Pour quelle valeur de *m* l'équation d'inconnue *x* admet-elle :

a. Une unique solution ?

b. Deux solutions distinctes ?

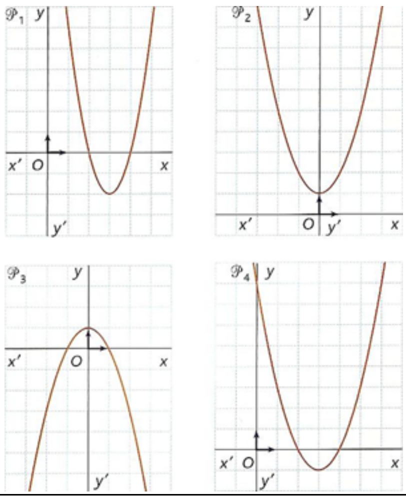
Exercice 8

Voici quatre paraboles P_1, P_2, P_3 et P_4 et quatre équations (A), (B), (C) et (D):

$(A): y = x^2 - 6x + 8$ $\qquad$ $(B): y = 2(x-2)(x-4)$

$(C): y = x^2 + 1$ $\qquad$ $(D): y = 1 - x^2$.

Retrouver l'équation de chacune de ces paraboles parmi *A*, *B*, *C* ou *D*.



Haut du document

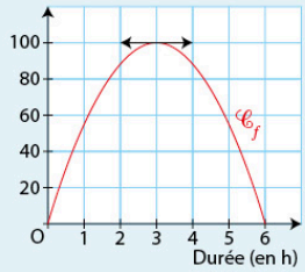
Exercice 9

125 Algo **Relier mathématiques et économie** 40 min

D'après Bac, Amérique du Nord, 2018

On appelle fonction de satisfaction toute fonction qui prend ses valeurs entre 0 et 100.
Lorsque la valeur 100 est atteinte, on dit qu'il y a « saturation ».
Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A. Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 h par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.



Déterminer par lecture graphique, la durée de travail conduisant à un état de « saturation ».

Partie B. La fonction « envie » correspondant à la fonction de satisfaction précédente est donnée par :

$$g(x) = -\frac{200}{9}x + \frac{200}{3}$$

On admet qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « envie » est positive ou nulle et « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.
Recopier et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche l'état d'esprit de cet étudiant. La variable t représente la durée du travail, en h, de l'étudiant

```
y ← −(200/9)t + 200/3
Si y ⩾ ...
    Afficher "..."
    sinon
    Afficher "..."
Fin Si
```

Partie C. Dans cette partie, on considère la fonction de satisfaction correspondant à la satisfaction d'un(e) client(e) d'un institut de beauté qui s'est offert un massage d'une heure.
La fonction est définie sur l'intervalle $[0 ; 60]$ par :

$$h(x) = -\frac{1}{36}x^2 + \frac{10}{3}x$$

où x représente la durée du massage en minute.

a) Déterminer à quel instant va être atteint « la saturation ».

b) La personne est dite « heureuse » lorsque la satisfaction est supérieure à 60. Déterminer à partir de quel instant la personne sera « heureuse ».

Haut du document

02 – Produit scalaire

Rappel de cours

Norme d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et si $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$, alors

$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

Produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$. En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Projeté orthogonal

Pour tous points A, B et C distincts du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Où H est le projeté orthogonal de C sur la droite $\left(AB\right)$.

Orthogonalité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Formules de polarisation

$$\begin{aligned} \vec{u}.\vec{v} &= \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right] \end{aligned}$$

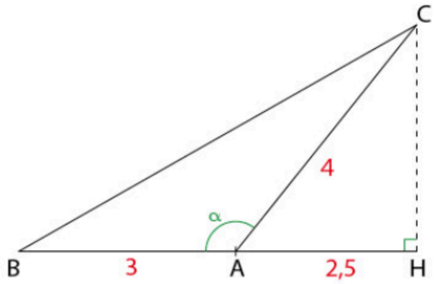
Repère orthonormé

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Haut du document

Calcul d'un angle

ABC est le triangle ci-contre avec $AB = 3$ et $AC = 4$.
H est le pied de la hauteur issue de C et $AH = 2{,}5$.
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b) En déduire la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir à l'unité.



Solution

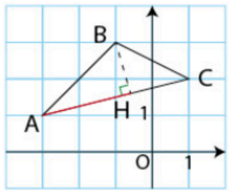
a) H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires,
donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -3 \times 2{,}5 = -7{,}5$.

b) De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$,
c'est-à-dire $-7{,}5 = 3 \times 4 \times \cos(\alpha)$.
Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{-7{,}5}{12} = -\dfrac{5}{8}$ et avec la calculatrice, $\alpha \approx 129°$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
– au **a)**, avec un projeté orthogonal,
– au **b)**, avec un cosinus.

Calcul d'une distance

Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$A(-3\,;1)$, $B(-1\,;3)$ et $C(1\,;2)$.
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b) En déduire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).
Arrondir au dixième.



Solution

a) $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 4 + 2 \times 1 = 10$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens,
donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$.
Ainsi $AH \times AC = 10$, c'est-à-dire $AH = \dfrac{10}{AC} = \dfrac{10}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$.
Donc $AH \approx 2{,}4$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
– au **a)**, avec l'expression analytique,
– au **b)**, avec un projeté orthogonal.

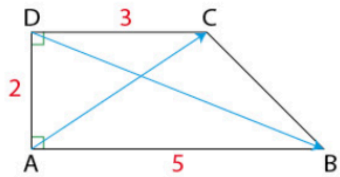
Haut du document

Utiliser la relation de Chasles

ABCD est le trapèze rectangle ci-contre tel que :

$$AB = 5, \quad AD = 2 \quad \text{et} \quad CD = 3.$$

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.



Solution

- D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ **(1)**
- $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, de même que $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} \cdot (-\overrightarrow{AD}) = -\overrightarrow{AD}^2 = -AD^2 = -4$
- $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = DC \times AB$, soit $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 5 = 15$.
- En reportant ces valeurs dans **(1)**, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -4 + 15 = 11$.

La relation de Chasles est un outil important pour calculer un produit scalaire ; elle permet de se ramener à des produits scalaires que l'on calcule avec des expressions du cours.

En notant I le point tel que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens, donc :
$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = AI \times AB = DC \times AB$

Résoudre l'inéquation $\dfrac{x+1}{-2x-1} \leqslant 0$.

Solution

$-2x - 1 = 0$ équivaut à $x = -\dfrac{1}{2}$, donc on résout l'inéquation dans $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

De plus, $x + 1 = 0$ équivaut à $x = -1$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+1}{-2x-1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

La « valeur interdite » $-\dfrac{1}{2}$ est représentée dans le tableau par une double barre sur la ligne « $\dfrac{x+1}{-2x-1}$ ».

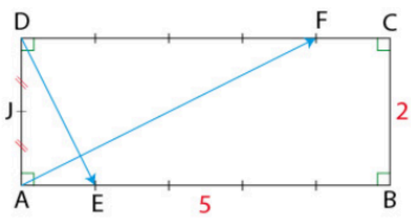
L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty\,;-1] \cup \left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Démontrer une orthogonalité

ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 2$. E, F et J sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

a) Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AJ})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AF}$.

b) Démontrer que les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.



Solution

a) A(0 ; 0), D(0 ; 2), E(1 ; 0) et F(4 ; 2) donc $\overrightarrow{DE}(1\,;-2)$ et $\overrightarrow{AF}(4\,;2)$.

b) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 4 - 4 = 0$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux et les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

Démontrer que deux droites sont perpendiculaires revient à démontrer qu'elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.

Haut du document

Exercice 1

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on donne $A(-1;-1)$, $B(-2;3)$ et $C(3;0)$.

1. Calculer AB, AC et BC.

2. Quelle est la nature de triangle ABC.

Exercice 2

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB=3$ et $BC=4$.
O est le milieu de $[BC]$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

2. I est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Calculer BI.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=5$ et $\widehat{BAD}=\frac{\pi}{3}$.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{DC}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle tel que $AB=3$, $AC=5$ et $BC=6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ au degré près.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé (O,I,J) on donne $A(1;-3)$, $B(-2;-1)$ et $C(5;1)$.

1. Calculer AB^2, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. Que remarque-t-on ?

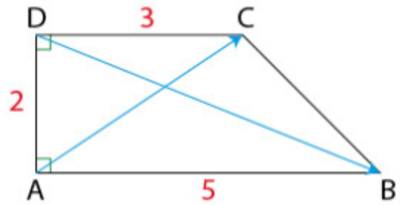
Exercice 6

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points :
$A(-1;0)$, $B(-2;-7)$, $C(12;-9)$ et $D(-9;-6)$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Haut du document

Exercice 7

$ABCD$ est le trapèze rectangle ci-dessous tel que : $AB = 5$, $AD = 2$ et $CD = 3$.



Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

Exercice 8

On considère un triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 30°$

1. Calculer le produit scolaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ d'une autre manière, déterminer la longueur AH.

3. En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, calculer $\overrightarrow{BC}^2$ puis la longueur BC.

4. En notant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2. Soit H le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC issues de A et de B.
Démontrer à l'aide de la formule du **1.** que la troisième hauteur passe aussi par le point H.

Exercice 9

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

On considère les points $A(1;2)$, $B(2;-2)$ et $C(-7;0)$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer les longueurs AB, AC et BC. Que peut-on dire du triangle ABC ?

2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondi au degré près.

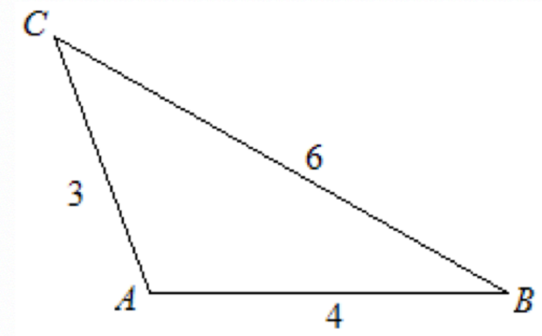
Haut du document

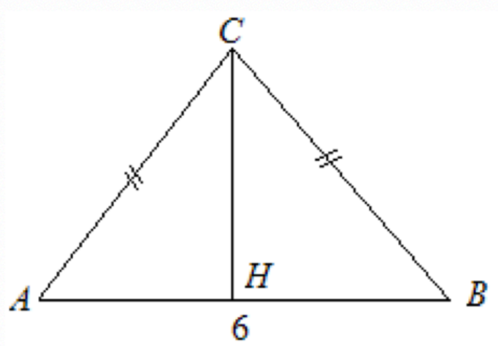
Exercice 9

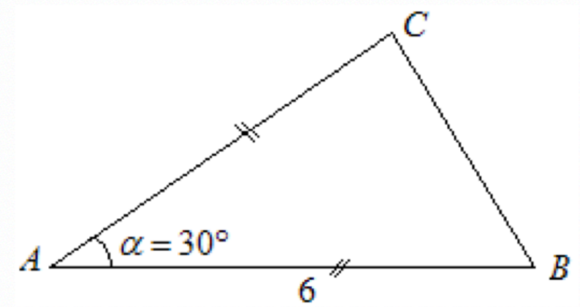
1. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = 1$. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le point du plan tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calculer les produits scalaires suivants :

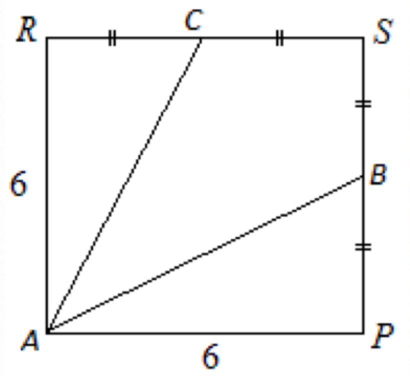
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BA}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC}$.

2. Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



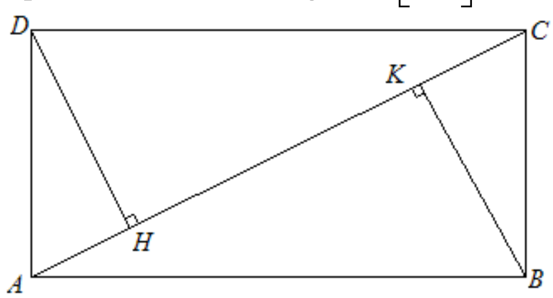






Exercice 10

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB = L$ et de largeur $AD = l$. Soit H et K les projetés orthogonaux respectifs des points D et B sur le segment $[AC]$.



1. Démontrer que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = L^2 - l^2$.

2. En déduire que $HK = \dfrac{L^2 - l^2}{\sqrt{L^2 + l^2}}$.

À quelle condition portant sur L et l aura-t-on $HK = \dfrac{1}{3}AC$?

Haut du document

Exercice 11

ABC est un triangle non équilatéral et non aplati.

A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[BC]$.

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le point de concours des trois médiatrices du triangle.

1. Réaliser une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. H est le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

c. Justifier que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

d. Montrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC).

e. En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H.

3. G est le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

a. Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

4. a. Démontrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

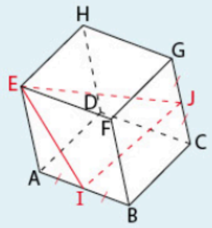
b. Que peut-on en déduire pour les points G, H et O ?

Exercice 12

119 Étudier un cube 45 min

D'après sujet Bac Amérique du Sud 2005

On donne le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG].



1. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$ **b)** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$ **d)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos(60°)$

2. a) Montrer que $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.

b) En déduire IJ.

c) Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{IEJ}$.

Arrondir à l'unité.

Haut du document

03 – Fonctions

Rappel de cours

Nombre dérivé

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tangente à une courbe

Équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Graphiquement, lire un nombre dérivé c'est lire le coefficient de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Fonction dérivée

Fonction	Dérivée	Intervalle
$f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Opérations

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+v'u$ $\qquad$ $(ku)'=ku'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$

Dérivée et variations

* $f'(x)\geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I
* $f'(x)\leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I

Haut du document

Déterminer l'équation d'une tangente

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

Solution

La fonction f est dérivable en tout nombre réel $x \neq 0$ et $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$. D'autre part $f(2)=\dfrac{1}{2}$.

Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$, soit $y=-\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $y=-\dfrac{1}{4}x+1$.

Pour obtenir une équation de la tangente au point A d'abscisse a, on calcule $f(a)$ et $f'(a)$, puis on écrit l'équation générale de la tangente, on remplace et on réduit.

Calculer la dérivée d'un polynôme, d'un produit

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3}$.

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-5x+3$.

c) h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+3)(x^2-5x+1)$.

Solution

a) Pour tout nombre réel x, $f(x)=ku(x)$ avec $k=\dfrac{1}{3}$ et $u(x)=x^2+1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x)=ku'(x)=\dfrac{1}{3}(2x)=\dfrac{2}{3}x$.

Pour tout nombre réel a, $\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{3}a$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme des fonctions $x\mapsto 2x^3$, $x\mapsto -5x$, $x\mapsto 3$ dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout nombre réel x, $g'(x)=2(3x^2)-5=6x^2-5$.

c) h est le produit des fonctions $u : x\mapsto x+3$ et $v : x\mapsto x^2-5x+1$ dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :

$u(x)=x+3$ $\quad u'(x)=1$

$v(x)=x^2-5x+1$ $\quad v'(x)=2x-5$

Ainsi $h'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1(x^2-5x+1)+(x+3)(2x-5)$

$h'(x)=x^2-5x+1+2x^2-5x+6x-15=3x^2-4x-14$.

Bien distinguer la formule du cours que l'on applique, repérer les fonctions u, v et déterminer leurs dérivées u' et v'.

Haut du document

Calculer la dérivée d'un quotient

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions.

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{3}$.

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-5x+3$.

c) h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(x+3)(x^2-5x+1)$.

Solution

a) Pour tout nombre réel x, $f(x)=ku(x)$ avec $k=\frac{1}{3}$ et $u(x)=x^2+1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x)=ku'(x)=\frac{1}{3}(2x)=\frac{2}{3}x$.

Pour tout nombre réel a, $\frac{a}{3}=\frac{1}{3}a$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme des fonctions $x\mapsto 2x^3$, $x\mapsto -5x$, $x\mapsto 3$ dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout nombre réel x, $g'(x)=2(3x^2)-5=6x^2-5$.

c) h est le produit des fonctions $u: x\mapsto x+3$ et $v: x\mapsto x^2-5x+1$ dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x :

$u(x)=x+3$ $\quad u'(x)=1$

$v(x)=x^2-5x+1$ $\quad v'(x)=2x-5$

Ainsi $h'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1(x^2-5x+1)+(x+3)(2x-5)$

$h'(x)=x^2-5x+1+2x^2-5x+6x-15=3x^2-4x-14$.

Bien distinguer la formule du cours que l'on applique, repérer les fonctions u, v et déterminer leurs dérivées u' et v'.

Exercice 1

Pour chaque fonction ci-dessous, calculer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ et établir le tableau de variation de la fonction.

1. $f(x)=2x^3-6{,}5x^2+5x+7$

2. $f(x)=(x^2+1)(6x^2-10)$

3. $f(x)=\frac{4x+1}{2x^2+1}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;0[$ par $f(x)=x+1+\frac{2}{x}$.

Les affirmations ci-dessous sont-elles exactes ? Justifier vos réponses.

1. La fonction f admet un maximum sur $]-\infty;0[$ égal à $1-2\sqrt{2}$.

2. Pour tout x de $]-\infty;-2]$, on a : $f(x)\geq -2$.

3. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;-\sqrt{2}[$.

Haut du document

Exercice 3

On souhaite fabriquer un aquarium (sans couvercle) de base carrée pour contenir des poissons rouges.
Il faut un volume de 13,5 L (soit 13500 cm^3) pour que les poissons soient heureux.
On cherche à déterminer les dimensions de l'aquarium afin d'utiliser le moins de matériel possible.
1. On note x la longueur, en cm d'un côté de la base.
a. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

b. Donner l'expression de la hauteur h de l'aquarium en fonction de x.

2. Soit $A(x)$ la somme des aires de toutes les faces de cette boîte.
Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

3. Pour tout x de l'ensemble de définition, calculer $A'(x)$ et montrer que

$$A'(x)=\frac{2(x-30)(x^2+30x+900)}{x^2}.$$

4. Établir le tableau de variation de A sur son ensemble de définition.

5. Déterminer les dimensions de l'aquarium qui permettent d'obtenir une aire minimale.
Quelle sera alors cette aire ?

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3-2x^2+4x+5$ dont la courbe représentative est C_f.
1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

2. On cherche, à présent, à étudier la position relative de la courbe C_f et de sa tangente T.
a. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=-x^3-2x^2+7x-4$.
Calculer $P(-4)$.

b. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel, on ait : $P(x)=(x+4)(ax^2+bx+c)$.

c. En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

d. Conclure.

Haut du document

Exercice 5

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\dfrac{-x^3+5x}{x^2+3}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur l'écran de votre calculatrice.

b. Quelle propriété géométrique pouvez-vous conjecturer ?

c. Prouver cette conjecture.

2. Pour tout *x* réel, calculer $f'\left(x\right)$ et montrer que $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x^2+15\right)\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$.

3. Établir le tableau de variation de la fonction *f* sur $\left[0;10\right]$.

4. On note *T* la tangente à la courbe de *f* au point d'abscisse 0.

a. Vérifier que $T : y=\dfrac{5}{3}x$.

b. Déterminer le signe de l'expression $f\left(x\right)-\dfrac{5}{3}x$ suivant les valeurs de *x*.

c. En déduire la positive relative de la courbe C_f par rapport à sa tangente *T*.

On dit que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe de f.

5. a. Déterminer deux réels *a* et *b* tels que, pour tout réel *x* : $f\left(x\right)=ax+\dfrac{b}{x^2+3}$.

b. On considère à présent la droite $D : y=-x$.

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite *D*.

Haut du document

Exercice 6

107 Algo **Étudier une consommation** 45 min

D'après Bac 2018, Polynésie

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule. Cette consommation est modélisée par la fonction *f* définie sur l'intervalle $[30\ ;\ 130]$ par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30000}{x^2}$$

où x est exprimé en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et $f(x)$ est exprimé en litre pour 100 km.

a) Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à $30\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, quelle est sa consommation ?
Et lorsqu'il roule à $50\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$?

b) Montrer que la dérivée f' de f sur l'intervalle $[30\ ;\ 130]$ peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{800x - 60000}{x^3}$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30\ ;\ 130]$ et en déduire le tableau de variations de *f* sur cet intervalle.

d) Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimum ? Que vaut alors cette consommation ?
Arrondir au centième.

e) On considère l'algorithme ci-dessous.

$x \leftarrow 30$
$y \leftarrow 14$
Tant que $y > 4$
  $x \leftarrow x + 1$
  $y \leftarrow \dfrac{8x^2 - 800 + 30000}{x^2}$
Fin Tant que

Quelle est la valeur de x obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ? En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Exercice 7

La fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]-1;+\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente *T* à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 0.

4. Étudier la position relative de la courbe représentative de *f* et de la droite d'équation $y = x$.

Haut du document

04 – Suites

Rappel de cours

Variations

* (u_n) est croissante $\Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$.
* (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$.
* (u_n) est constante ou stationnaire $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n$.

Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$, r est la raison.

* (u_n) est arithmétique $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n$ est constante
* $u_n = u_0 + nr$ $\qquad u_n = u_1 + (n-1)r$ $\qquad u_n = u_k + (n-k)r$

Somme : $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\text{Somme} = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Suite géométrique : $u_{n+1} = q \times u_n$, q est la raison.

* (u_n) est géométrique $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante, $u_n \neq 0$.
* $u_n = u_0 \times q^n$ $\qquad u_n = u_1 \times q^{n-1}$ $\qquad u_n = u_k \times q^{n-k}$

Somme : $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$

$$\text{S} = \text{premier terme} \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Variation de (q^n)

* Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
* Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale à 1.
* Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
* Si $q = 0$, alors la suite (q^n) est constante égale à 0, à partir du rang 1.
* Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

Haut du document

Calculer le terme d'une suite arithmétique

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_1 = -5$.

a) Calculer u_{20}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer u_n explicitement en fonction de n.

Solution

a) $u_{20} = u_1 + (20-1)r$

$u_{20} = -5 + (20-1)\times 3$

$u_{20} = -5 + 19 \times 3$

$u_{20} = -5 + 57$

$u_{20} = 52$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$, c'est-à-dire :

$u_n = -5 + 3(n-1)$

$u_n = -5 + 3n - 3$

$u_n = 3n - 8$

Pour calculer un terme d'une suite arithmétique, on utilise la formule explicite $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$.
Pour effectuer le calcul, on veille à respecter les priorités opératoires : calculs dans la parenthèse puis on effectue la multiplication.

Calculer le terme d'une suite géométrique

(v_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $v_1 = 7$.

a) Calculer v_{10}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer v_n explicitement en fonction de n.

Solution

a) $v_{10} = v_1 \times 2^{10-1}$

$v_{10} = 7 \times 2^9$

$v_{10} = 7 \times 512$

$v_{10} = 3\,584$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times 2^{n-1}$

c'est-à-dire $v_n = 7 \times 2^{n-1}$.

Pour calculer un terme d'une suite géométrique, on utilise la formule explicite $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$. Pour effectuer le calcul, on veille à respecter les priorités opératoires : on effectue d'abord la puissance.

On sait que $2^{n-1} = \dfrac{2^n}{2}$ donc on a aussi $v_n = \dfrac{7}{2} \times 2^n$.

Calculer une somme de termes d'une suite arithmétique

(u_n) est la suite arithmétique de raison 4 telle que $u_2 = -5$.

Pour tout nombre $n \geqslant 2$ de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n explicitement en fonction de n.

b) Tabuler la suite (S_n) avec la calculatrice et lire une valeur de n telle que $S_n = 99$.

Solution

a) Pour tout nombre $n \geqslant 2$, $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

$S_n = u_2 + (u_2 + 4) + (u_2 + 2\times 4) + \ldots + (u_2 + (n-2)\times 4)$

$S_n = (n-1)u_2 + 4(1 + 2 + \ldots + (n-2))$

$S_n = -5(n-1) + 4\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = -5(n-1) + 2(n-2)(n-1)$

$S_n = (n-1)(-5 + 2(n-2))$

$S_n = (n-1)(2n-9)$

b) À l'écran de la calculatrice, on lit que la suite (S_n) prend la valeur 99 pour $n = 10$.

n	an
7	30
8	49
9	72
10	99

- Inutile de calculer chaque terme de S_n.
- On exprime $u_2, u_3, \ldots, u_n$ en fonction de u_2 à l'aide de :
  $\boldsymbol{u_n = u_2 + (n-2)r}$
- Le nombre de termes de u_2 à u_n est $n - 2 + 1$ c'est-à-dire $n - 1$.
- Enfin, on utilise la formule donnant $1 + 2 + \ldots + n$.
- En développant le produit, on obtient $S_n = 2n^2 - 11n + 9$.

Haut du document

Calculer une somme de termes d'une suite géométrique

(v_n) est la suite géométrique de raison 3 telle que $v_2 = 0{,}2$. Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$.

Solution

$S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$

$S = v_0 + 3 \times v_0 + 3^2 \times v_0 + \ldots + 3^{10} \times v_0$

$S = v_0\left(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{10}\right)$

$S = 0{,}2 \times \dfrac{1-3^{11}}{1-3} = 0{,}2 \times \dfrac{3^{11}-1}{2}$

$S = 0{,}1\left(3^{11}-1\right) = 17\,714{,}6$

- Inutile de calculer chaque terme de S.
- On exprime $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ en fonction de v_0 à l'aide de :

$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n}$$

- Enfin, on utilise la formule donnant $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

Exercice 1

1. Calculer le 16ième terme de la suite arithmétique telle que $u_0 = 9$ et de raison -5.

2. On donne $v_4 = 11$ et $v_8 = 23$. Calculer v_{10}. Exprimer v_n en fonction de *n*.

Exercice 2

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2+4n+1}{n+1}$ est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

2. Soit *a* un réel fixé, montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = (an+1)^2 - (an-2)^2$ est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n} \end{cases}$.

1. Calculer les 4 premiers termes.

2. (u_n) est-elle arithmétique ?

3. On définit la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et donner son premier terme et sa raison.

4. Exprimer v_n en fonction de *n*.

5. En déduire u_n en fonction de *n*.

Haut du document

Exercice 4

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. On donne $v_7 = 16$ et $v_{10} = \frac{-128}{27}$. Déterminer *q*. En déduire v_n en fonction de *n*.

Exercice 5

On donne $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 3u_n + 8$.

1. Pour quelle valeur théorique de u_0 la suite (u_n) est constante. On appelle α cette valeur.

2. On pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que (v_n) est géométrique. On précisera ses éléments caractéristiques.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

Exercice 6

Soit (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{-u_n + 12}{5}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 7

Calculer :

1. $S = 1 + 2 + 3 + ... + 100$. **2.** $S = 5 + 7 + 9 + ... + 301$.

3. quelle est la somme des multiples de 6 compris entre 200 et 4000.

4. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison 3.
Sachant que $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = 150$, calculer *n*.

Haut du document

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3, puis v_0, v_1, v_2 et v_3.

2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

3. En déduire une expression de v_n en fonction de *n*, puis de u_n en fonction de *n*.

4. Déterminer les variations de (v_n) puis de (u_n).

5. Calculer $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de *n*.

Exercice 9

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$u_n = \frac{1}{3} \times 2^n - (7n + 4)$ et $v_n = \frac{1}{3} \times 2^n + 7n + 4$.

Soit (w_n) et (t_n) deux suites définies par : $w_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$.

1. Montrer que (w_n) est géométrique. On précisera le premier terme de la raison.

2. Montrer que (t_n) est arithmétique. On précisera le premier terme de la raison.

3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Donner une expression de S_n en fonction de *n*.

Haut du document

Exercice 10

Partie A

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 de premier terme $u_0 = 0,2$.

1. Calculer u_{18} puis u_{50}.

2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{18}$, c'est-à-dire la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n).

3. Recopier et compléter les trois parties en pointillé de l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier n tel que la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u dépasse 100 000.

```
U ← 0,2
S ← 0,2
N ← 0

Tant que ......
   U ← ...
   S ← ...
   N ← N+1

Fin tant que
Afficher N
```

Partie B

Claude a donné 20 centimes d'euros (soit 0,20 €) à son petit enfant Camille pour sa naissance. Ensuite, Claude a doublé le montant offert d'une année sur l'autre pour chaque anniversaire jusqu'aux 18 ans de Camille.
La somme totale versée par Claude à Camille permet-elle de payer un appartement à Angers d'une valeur de 100 000 € ?

Haut du document