Cahier de vacances seconde à première
Mathématiques

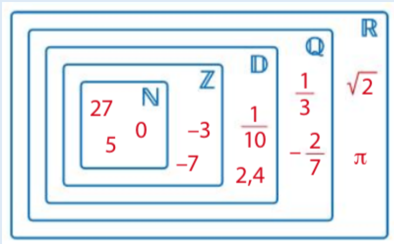
TABLE DES MATIERES

01 – Manipuler les nombres réels

Rappel de cours

Les ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{D}$: l'ensemble des nombres décimaux.
$\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.



Nombre décimal

d est un nombre décimal s'il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $d=\dfrac{a}{10^n}$.
Il a un nombre fini de chiffres à droite de la virgule.

Nombre rationnel

Un nombre q est rationnel s'il existe deux entiers relatifs a et b avec $b\neq 0$, tels que $q=\dfrac{a}{b}$.

Tout nombre rationnel admet une forme irréductible unique $\dfrac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux.

Puissances

$a^n=\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ fois}}$ $\qquad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

$a^0=1$ $\qquad a^1=a$

$a^n\times a^p=a^{n+p}$ $\qquad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \dfrac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ $\qquad \left(a^n\right)^p=a^{n\times p}$

$(a\times b)^n=a^n\times b^n$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

Racines carrées

$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et si $b\neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Intervalles

L'intervalle $\left[a;b\right]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.
L'intervalle $\left]a;+\infty\right[$ est l'ensemble des réels x tel que $a < x$.

Distance

Si A et B sont deux points de la droite des réels d'abscisses respectives a et b.
Alors on a : $AB = \left|b - a\right|$

Exercice 1

Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 2

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 3

1. Soit $A = 5{,}555...$. Montrer que $A = \frac{50}{9}$.

2. Déterminer la forme rationnelle des nombres suivants :
$B = 1{,}333...$ $\quad C = 2{,}1212...$ $\quad D = 12{,}3123123...$

Exercice 4

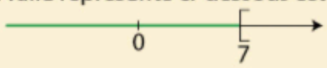
1. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :
$A = \sqrt{72}$ $\quad B = \sqrt{45}$ $\quad C = 3\sqrt{125}$
$D = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ $\quad E = \sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

2. Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$, avec a, b et c entiers.
$A = \left(5 - \sqrt{3}\right)^2$ $\quad B = \left(\sqrt{2} - 3\right)^2$
$C = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ $\quad D = \left(3 + \sqrt{3}\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$

3. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Exercice 5

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	Le nombre $-\frac{1}{3}$ appartient à …	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
2	Le nombre $\frac{48}{15}$ est égal à …	$\frac{50}{17}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{40}{7}$	$\frac{15}{48}$
3	Le nombre π appartient à …	$]-1\,;3[$	$[4\,;+\infty[$	$[1\,;2] \cup]3\,;7[$	$\mathbb{R}-\{\pi\}$
4	L'intervalle représenté ci-dessous est … 	$]-\infty\,;7]$	$]7\,;+\infty[$	$]-\infty\,;7[$	$[4\,;7[$
5	L'arrondi au centième de $\sqrt{7}$ est …	2,646	2,645	2,65	2,64
6	La distance entre les nombres réels 1 et $\sqrt{2}$ est …	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$-1-\sqrt{2}$
7	L'ensemble des nombres réels x tels que $\lvert x-1\rvert \leqslant 2$ est l'intervalle …	$[-3\,;1]$	$[-1\,;3]$	$]-\infty\,;3]$	$]-1\,;3[$

Exercice 6

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

		A	B	C	D
1	Le nombre $\frac{319}{160}$ appartient à …	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
2	Le nombre $\frac{2\pi}{3}$ est un nombre …	rationnel	réel	irrationnel	décimal
3	Le nombre $\frac{2}{3}$ a une partie décimale …	finie	illimitée	périodique	illimitée composée de 3
4	Sur une droite graduée, M et N sont les points d'abscisses respectives -4 et $-2{,}5$. La distance MN est …	$\lvert -4+2{,}5\rvert$	$-2{,}5+4$	1,5	$\lvert -2{,}5+4\rvert$

Exercice 7

Avec la calculatrice, Steven a obtenu l'affichage suivant :

```
√13
               3.605551275
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous par des encadrements décimaux de $\sqrt{13}$ d'amplitudes données.

Amplitude	Encadrement
10^{-1}	$\ldots < \sqrt{13} < \ldots$
10^{-2}	$\ldots < \sqrt{13} < \ldots$
10^{-3}	$\ldots < \sqrt{13} < \ldots$

AIDE

Il y a plusieurs façons pour compléter chaque ligne. Mais, pour une amplitude 10^{-n}, le plus simple est de compléter par deux nombres consécutifs qui ont n chiffres dans leurs parties décimales.

Exercice 8

Recopier puis relier chacun des intervalles donnés à sa représentation sur une droite graduée.

$[-5\,;+\infty[$ $\quad$ $]-5\,;8[$ $\quad$ $]-\infty\,;8[$

AIDE Les crochets ouverts correspondant à $-\infty$ et $+\infty$ n'apparaissent pas sur la représentation.

Exercice 9

Recopier puis relier chaque description à sa traduction avec la notation valeur absolue.

La distance entre x et 1 est égale à 3.	La distance entre x et 1 est inférieure ou égale à 3.	La distance entre x et 0 est inférieure ou égale à 3.	La distance entre x et -1 est supérieure ou égale à 3.
$\lvert x+1\rvert \geqslant 3$	$\lvert x-1\rvert \leqslant 3$	$\lvert x\rvert \leqslant 3$	$\lvert x-1\rvert = 3$

AIDE On peut s'aider d'une droite graduée.

Exercice 10

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	Le nombre : $\dfrac{2-5\times 8}{5+5\times 2}$ appartient à l'ensemble …	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$
2	Le nombre : $(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ est un nombre …	entier naturel	entier relatif	décimal non entier	irrationnel
3	Le nombre π appartient à l'ensemble …	$\mathbb{Q}$	$[0\,;3{,}14]$	des nombres réels x tels que $\lvert x\rvert \leqslant 3{,}14$	$\left]\dfrac{223}{71}\,;+\infty\right[$
4	Le nombre réel x tel que $2\pi x+5\pi=0$ est …	un décimal	un rationnel non décimal	un irrationnel	-7π
5	Voici trois intervalles : $\mathrm{I}=[-1\,;2]$, $\mathrm{J}=]-4\,;0[$ et $\mathrm{K}=]-0{,}5\,;8]$. Alors $(\mathrm{I}\cap\mathrm{J})\cap\mathrm{K}$ est l'intervalle …	$]-4\,;8]$	$]-0{,}5\,;0]$	$]-0{,}5\,;0[$	$[-0{,}5\,;0[$
6	Voici trois intervalles : $\mathrm{I}=[-15\,;2]$, $\mathrm{J}=]1\,;+\infty[$ et $\mathrm{K}=]-\infty\,;8]$. Alors $(\mathrm{I}\cap\mathrm{K})\cup\mathrm{J}$ est l'intervalle …	$\mathbb{R}$	$[-15\,;2]$	$[-15\,;+\infty[$	$]-\infty\,;2]$

		A	B	C	D
7	Les nombres réels x vérifiant : $\|x-1\| \geqslant 3$ appartiennent à …	l'intervalle $]-2\,;4[$	l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ ou l'intervalle $[4\,;+\infty[$	l'intervalle $]-\infty\,;-4]$ ou l'intervalle $[2\,;+\infty[$	l'intervalle $[1\,;3[$
8	Dans un repère, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant : $\begin{cases}\|x\| \leqslant 2 \\ \|y-2\| \leqslant 1\end{cases}$ est …	un cercle	un disque	un carré	un rectangle non carré
9	a désigne un nombre de développement décimal 0,238 238 238… Alors …	a est un nombre décimal	a est un nombre irrationnel	$a = \dfrac{238}{1000}$	$a = \dfrac{238}{999}$
10	Un nombre réel x vérifie l'inégalité : $\|x+1\| \leqslant \|x-5\|$ Alors …	x peut être égal à 5	x appartient à $[0\,;+\infty[$	$x > -1$	x appartient à $]-\infty\,;2]$

Exercice 11

1. Écrire $A = \dfrac{3^{-10} \times 9^2}{3^5}$ sous la forme d'une puissance de 3.

2. Écrire $B = 22^6 \times \dfrac{33^3}{8 \times 6^3}$ sous la forme 11^n, ou n est un entier relatif.

Exercice 12

1. Écrire $\sqrt{300}$, $\sqrt{108}$ et $\sqrt{192}$ sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a nombre entier naturel.

2. En déduire une écriture simplifiée de $B = \sqrt{300} - \sqrt{108} - 5\sqrt{192}$.

Exercice 13

Développer et réduire :

$A = \left(5 + \sqrt{15}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$ $\qquad$ $B = \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} - 1\right)$

02 – Calcul littéral

Rappel de cours

Développement et factorisation

Pour tous nombres a, b, c, d et k on a les identités suivantes :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$k(a-b) = ka - kb \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Équations

$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, avec $a \neq 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur est non nul.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ avec } B(x) \neq 0$$

Inéquations

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Signe de -a	0	Signe de a	

Déterminer le tableau de signes d'un produit ou d'un quotient de fonctions affines revient à résumer le signe de chacune des fonctions affines dans un même tableau, et d'appliquer la règle des signes

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité.

Exemple de résolution : Équation produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4(x-3)(x+2)-(x^2-9)=0$.

Solution

$4(x-3)(x+2)-(x^2-9)=0$ équivaut successivement à :

$4(x-3)(x+2)-(x+3)(x-3)=0$

$(x-3)[4(x+2)-(x+3)]=0$

$(x-3)(3x+5)=0$

$x-3=0$ ou $3x+5=0$

$x=3$ ou $x=-\frac{5}{3}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3}\,;\,3\right\}$.

Pour résoudre cette équation, on peut penser à développer mais on obtiendra une équation que l'on ne sait pas a priori résoudre : $3x^2-4x-15=0$.
En revanche, factoriser x^2-9 permet de faire apparaître un facteur commun et de se ramener à une équation produit nul.

Exemple de résolution : Équation quotient

Résoudre l'équation $\frac{4x-1}{2x+1}=3$.

Solution

$2x+1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{2}$.

On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Pour $x\neq-\frac{1}{2}$, $\frac{4x-1}{2x+1}=3$ équivaut, en multipliant chaque nombre par $2x+1$, à $4x-1=3(2x+1)$, c'est-à-dire $4x-1=6x+3$.

Ainsi, $-2x=4$, c'est-à-dire $x=-2$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-2\}$.

Dans une équation, dès que l'inconnue apparaît au dénominateur, on détermine les « valeurs interdites », c'est-à-dire celles qui annulent ce dénominateur.
Ensuite on résout l'équation dans $\mathbb{R}$ privé de ces « valeurs interdites ».

Exemple de résolution : Inéquation quotient

Résoudre l'inéquation $\frac{x+1}{-2x-1}\leqslant 0$.

Solution

$-2x-1=0$ équivaut à $x=-\frac{1}{2}$, donc on résout l'inéquation dans $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

De plus, $x+1=0$ équivaut à $x=-1$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+1}{-2x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

La « valeur interdite » $-\frac{1}{2}$ est représentée dans le tableau par une double barre sur la ligne « $\frac{x+1}{-2x-1}$ ».

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S}=]-\infty\,;-1]\cup\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Exemple de résolution : Se ramener à une inéquation

Résoudre l'inéquation $x \geqslant \frac{1}{x}$.

Solution

$\frac{1}{x}$ n'existe que si $x \neq 0$. On résout donc l'inéquation dans $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $x - \frac{1}{x} \geqslant 0$, soit $\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \geqslant 0$.

Cette inéquation équivaut à $\frac{x^2-1}{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire $\frac{(x-1)(x+1)}{x} \geqslant 0$.

On dresse le tableau de signes de ce quotient.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-1\,;0[\ \cup\ [1\,;+\infty[$.

Attention, **on ne peut pas** multiplier par x chaque membre de l'inéquation $x \geqslant \frac{1}{x}$ car le signe de x n'est pas constant.

Exercice 1

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 3x^2 - 6x$

$B = (2x+1)(x-5) - 5x(2x+1)$

$C = (2x+1)^2 - (3-x)(2x+1)$

$D = (3x+1)(1-2x) + (1-2x)$

$E = 4x^2 - 24x + 36$

$F = 9 - 25x^2$

$G = (2x-5)^2 - (3x+1)^2$

$H = 4x^2 - 1 - (5x-2)(2x+1)$

Exercice 2

Écrire les nombres suivants sans racine au dénominateur.

$A = \frac{-2}{1+\sqrt{3}}$ $\quad B = \frac{-2}{2-\sqrt{6}}$ $\quad C = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $(3x-1)(x+2) - (1-2x)(3x-1) = 0$

2. $7x^2 - 3x = 0$

3. $3x(x-2) - x(5x+1) = 0$

4. $x^2 - 9 - (2x+5)(x+3) = 0$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{3x+1}{x-3}=0$ **2.** $\dfrac{(2-x)(3+2x)}{x-1}=0$

3. $\dfrac{x^2-16}{x+4}=0$ **4.** $1-\dfrac{x+4}{x-4}=\dfrac{3}{3-x}$

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2(x+3)\leq 3(7-x)$ **2.** $(4x-24)(8-2x)>0$ **3.** $\dfrac{5+x}{x-4}\geq 0$

4. $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-4}\geq 0$ **5.** $x-2>\dfrac{1}{x-2}$ **6.** $\dfrac{(x+1)(2-x)}{(3-x)(x+4)}\leq 0$

7. $x\geq \dfrac{7x-4}{x+3}$

Exercice 6

On considère n un entier naturel. On souhaite comparer les nombres suivants :

$$A=\frac{n+2}{n+3} \text{ et } B=\frac{n+3}{n+4}.$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a : $A-B=\dfrac{-1}{(n+3)(n+4)}$.

2. Étudier le signe de cette différence et conclure.

Exercice 7

On considère l'expression $A(x)=4x^2-12x+9-(3x-1)(2x-3)$.

1. Développer $A(x)$.

2. a. Factoriser $4x^2-12x+9$.

b. En déduire une factorisation de $A(x)$.

3. Résoudre les équations suivantes : **a.** $A(x)=0$ **b.** $A(x)=6$

Exercice 8

On souhaite trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 2019.
1. Traduire le problème posé à l'aide d'une équation.

2. Résoudre l'équation et conclure.

Exercice 9

Si on augmente de 2 m la longueur du côté d'un carré, l'aire augmente de 20 m^2.
Quelle est l'aire, en m^2, de ce carré ?

Exercice 10

Un père de 41 ans a trois enfants âgés de 6 ans, 9 ans et 12 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Exercice 11

Ce trimestre, Bernard a obtenu les notes suivantes en SVT.

Note	14	17	18	16
Coefficient	3	2	1	2

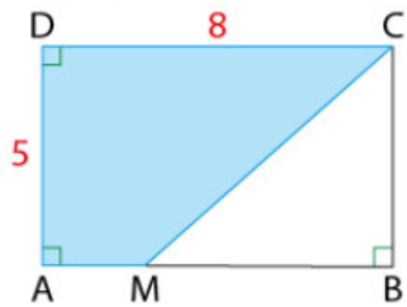
Elle souhaite calculer la note qu'elle doit obtenir au dernier contrôle, coefficient 2, pour avoir une moyenne trimestrielle de 16 en SVT.
On note x la note cherchée (avec $0 \leq x \leq 20$).

1. Justifier que le problème se traduit par l'équation $\frac{126+2x}{10}=16$

2. Résoudre cette équation et conclure.

Exercice 12

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB=8$ et $AD=5$. M est un point mobile du côté $[AB]$. Pour quelle position du point M l'aire du trapèze $AMCD$ est-elle supérieure ou égale au triple de l'aire du triangle BCM ?



03 – Divisibilité et nombres premiers

Rappel de cours

Multiples et diviseurs

S'il existe un nombre entier k tel que $a = k \times b$, on dit que :
b est un diviseur de a ou que a est un multiple de b.

Nombre premier

Un nombre entier naturel est premier s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Nombre pair et impair

n est pair alors il existe alors un entier relatif k tel que $n = 2k$.
n est impair alors il existe alors un entier relatif k tel que $n = 2k+1$.

Rendre irréductible une fraction

M est le nombre $\frac{45\,738}{6\,160}$.

a) Simplifier M et présenter le résultat avec une fraction irréductible.

b) Quelle est la nature de ce nombre M ?

Solution

a) On décompose 45738 et 6160 en produits de facteurs premiers.

45738	2
22869	3
7623	3
2541	3
847	7
121	11
11	11
1	

6160	2
3080	2
1540	2
770	2
385	5
77	7
11	11
1	

On divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant.
On peut utiliser la calculatrice pour déterminer les quotients.

$45\,738 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2 \qquad 6\,160 = 2^4 \times 5 \times 7 \times 11$

$$M = \frac{45\,738}{6\,160} = \frac{2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2}{2^4 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{3^3 \times 11}{2^3 \times 5} = \frac{297}{40}$$

b) La décomposition en produit de facteurs premiers du dénominateur ne contient que des puissances de 2 et de 5, donc M est un nombre décimal $(M = 7{,}425)$.

Propriétés (rappels)

Un nombre entier relatif est divisible :
- par 2 lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exercice 1

Soit p un nombre premier différent de 2.
1. Quelle est la parité de p ? de $p-1$? de $p+1$?

2. Quelle est alors la parité de p^2-1 ?

Exercice 2

Montrer que si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Exercice 3

Montrer pour tout entier naturel n que :
1. L'entier naturel $3n^2+n$ est pair.

2. Si n^2+5 n'est pas divisible par 2 alors n est pair, utilisant la contraposée.

Exercice 4

1. Parmi les nombres suivants dire ceux qui sont premiers, sinon décomposer les en produit de facteurs premiers :

$$821 \ ; 861 \ ; 1001 \ ; 1027.$$

2. Donner sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes :

$$\frac{540}{506} \ ; \frac{45600}{7650} \ ; \frac{12789}{5481}$$

Exercice 5

1. Décomposer 675 et 4725 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\frac{675}{4725}$ au maximum.

3. Calculer $\frac{675}{4725}+\frac{5}{14}$ et donner le résultat sous forme de fraction irréductible.

Exercice 6

Le but de la question **1.** est de démontrer par disjonction des cas, que $a = n\left(n^2+3\right)$ est pair pour tout entier relatif *n*.

1. Comment s'écrit un entier pair ? Un entier impair ?

2. Remplacer *n* par son écriture dans *a* :

a. Lorsque *n* est pair.

b. Lorsque *n* est impair.

c. Conclure sur la parité de *a*.

3. On considère le nombre $b = \left(n^2+7\right)\left(n-3\right)$, ou *n* est un entier relatif.

En s'inspirant du raisonnement précédent, montrer que :

a. Si *n* est pair, alors *b* est impair.

b. Si *n* est impair, alors *b* est un multiple de 8.

Exercice 7

1. a. Décomposer 135 et 210 en produit de facteurs premiers.

b. Déterminer un diviseur commun à 135 et 210 appartenant à $\left[10;40\right]$.

2. Dans sa salle de bain, Mathias veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier en centimètre le plus grand possible.

a. Déterminer la longueur, en cm, du côté d'un carreau sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de Largueur.

b. Combien faudra-t-il de carreaux ?

Exercice 8

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

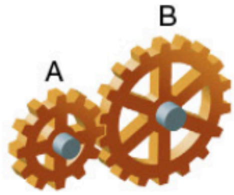
		A	B	C	D
1	1 214 est un multiple de …	39	87	139	607
2	Un diviseur commun à 69 et 161 est …	483	92	23	13
3	Un nombre divisible à la fois par 2 et par 3 est …	2 358	405	1 563	297
4	La somme d'un multiple de 3 et d'un multiple de 6 est toujours un multiple de …	18	6	3	12
5	Un nombre premier est …	1	2	27	95
6	La décomposition en produit de facteurs premiers de 24×90 est …	$2^3 \times 3^2 \times 5$	$16 \times 27 \times 5$	$2^4 \times 3^3 \times 5$	$2^5 \times 3^5 \times 5$

Exercice 9

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

		A	B	C	D
1	La somme de quatre nombres impairs consécutifs …	est un nombre pair	est un nombre impair	n'a pas toujours la même parité	est un multiple de 8
2	Une fraction irréductible est …	$\frac{37}{25}$	$\frac{224}{620}$	$\frac{783}{546}$	$\frac{60}{187}$
3	Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)$ est …	un nombre pair	un nombre impair	un nombre premier	égal à $(n+1)^2-(n+1)$
4	$\frac{6}{5} \times \frac{3}{7} - \frac{4}{3} \times \frac{3}{20}$ est égal à …	$\frac{17}{30}$	$\frac{11}{35}$	$\frac{44}{140}$	$\frac{132}{420}$
5	$n = 2^4 \times 3^6 \times 5^2$. Alors …	n est un carré parfait	n est un cube parfait	$\sqrt{n}$ est un nombre entier	n est un multiple de 30

112 Une roue d'engrenage A a 18 dents. Elle est en contact avec une roue B de 24 dents.



a) Décomposer 18 et 24 en produits de facteurs premiers.

b) Au bout de combien de tours de chacune des roues seront-elles à nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

113 On dispose de plusieurs rectangles de dimensions 48 cm et 72 cm.
Déterminer le côté du plus petit carré que l'on peut former avec ces rectangles toujours dans la même position.

Exercice 10

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

		A	B	C	D
1	Le nombre de diviseurs de 441 est inférieur au nombre de diviseurs de …	125	1 003	48	75
2	La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de …	3	5	6	8
3	La somme des carrés de trois nombres pairs consécutifs est divisible par …	4	6	8	12
4	Un nombre entier naturel est divisible par 25 si, et seulement si, …	son chiffre des unités est 5	son chiffre des unités est 0	il se termine par 00, 25, 50 ou 75	la somme de ses chiffres est divisible par 25
5	Raphaël choisit au hasard un nombre entre 1 et 100. La probabilité qu'il ait choisi un nombre premier est …	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{23}{100}$
6	Un nombre qui est un cube parfait est …	$2^4 \times 3^3 \times 5$	$2^5 \times 7^3 \times 11^9$	$2^{12} \times 3^6$	$3^{15} \times 13^{23}$
7	Les deux nombres qui ont le plus grand diviseur commun sont …	12 et 124	28 et 94	35 et 60	48 et 72
8	Une fraction irréductible est …	$\frac{1584}{2079}$	$\frac{3927}{2431}$	$\frac{1624}{8712}$	$\frac{286}{6873}$
9	Deux bus quittent une station en même temps à 6 h.  L'un des bus revient à cette station toutes les 54 min et l'autre bus toutes les 1 h 12 min. Les deux bus seront à nouveau en même temps à cette station à …	8 h 24	9 h 36	12 h	10 h 32
10	Un nombre entier naturel n est parfait lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale à $2n$. Un nombre parfait est …	8	27	240	496

04 – Vecteurs

Rappel de cours

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors $ABDC$ est un parallélogramme.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

* Une direction : la droite (AB)
* Un sens : de A vers B
* Une norme : la longueur AB

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si est seulement si $ABDC$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Coordonnées : Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

La relation de Chasles : Pour tous points A, B et C on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Colinéarité : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ ils ont même direction $\Leftrightarrow$ il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

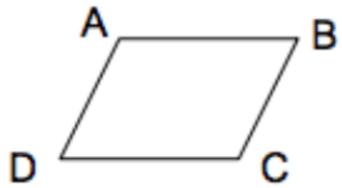
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\text{Det}(\vec{u};\vec{v}) = xy' - x'y$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\text{Det}(\vec{u};\vec{v}) = 0$

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme, construire les points *E*, *F*, *G* et *H* tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



Exercice 2

On considère un parallélogramme *NOTE*.

1. Construire les points *A* et *B*, images respectives des points *N* et *E* par les translations de vecteurs $\overrightarrow{TE}$ et $\overrightarrow{OT}$.

2. Montrer que *E* est le milieu du segment $\left[BN\right]$.

Exercice 3

Soit *VER* un triangle non aplati.

1. Construire les points *T* et *J*, images du point *V* par les translations respectives de vecteurs $\overrightarrow{ER}$ et $\overrightarrow{RE}$.

2. Établir que $\overrightarrow{JV} = \overrightarrow{VT}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4

Simplifier les écritures :

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ $\quad$ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ $\quad$ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ $\quad$ $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ $\quad$ $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

Exercice 5

Soit *A*, *B* et *C* trois points du plan, *I* le milieu de $\left[AB\right]$ et *J* le milieu de $\left[AC\right]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Exercice 6

Soit *A*, *B*, *C* et *D* quatre points du plan. Démontrer les égalités suivantes :

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC}$

Exercice 7

Soit I le milieu d'un segment $\left[AB\right]$ et M un point n'appartenant pas à la droite $\left(AB\right)$.

1. Construire les points C et D tels que : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}$

2. Quelle est la nature des quadrilatères $AIMC$ et $IBDM$?

3. Démontrer que M est le milieu de $\left[CD\right]$.

4. Démontrer que $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BM}$.

5. Soit E le symétrique de I par rapport à M.
a. Traduire cette propriété par une égalité vectorielle.

b. Démontrer que $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IE}$.

Exercice 8

Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A\left(-5;2\right)$, $B\left(-3;1\right)$, $C\left(0;5\right)$ et $D\left(2;4\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer les coordonnées du point E tel que $ABCE$ soit un parallélogramme.

3. Montrer que C est le milieu de $\left[ED\right]$.

4. Déterminer les coordonnées des points F, G et H tels que :
$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}$ $\quad$ $\overrightarrow{BG}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{ED}$ $\quad$ $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}$

Exercice 9

Soit les points $A\left(-1;1\right)$, $B\left(3;2\right)$, $C\left(-2;-3\right)$ et $D\left(6;-1\right)$.
Démontrer que les droites $\left(AB\right)$ et $\left(CD\right)$ sont parallèles.

Exercice 10

Soit les points $B\left(3;2\right)$, $D\left(6;-1\right)$ et $E\left(5;0\right)$.
Démontrer que les points B, D et E sont alignés.

Exercice 11

On donne les points $E(-1;-2)$, $F(3;-4)$ et $G(4;7)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}$.
2. En déduire les coordonnées du point *H* tel que *EFHG* soit un parallélogramme.

Exercice 12

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-3;1)$, $B(1;-1)$, $C(3;3)$ et *I*, milieu de $[AC]$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Soit $E(a;2)$. Déterminer *a* tel que *A*, *B* et *E* soient alignés.

3. Quelle est la nature du triangle *ABC* ?

4. Déterminer les coordonnées du point *D* image du point *A* par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Quelle est la nature du quadrilatère *ABCD* ?

5. Déterminer les coordonnées du point *J*, symétrique de *A* par rapport à *B*.

6. Déterminer les coordonnées du point *F* appartenant à l'axe des abscisses tel que *A*, *B* et *F* soient alignés.

7. Déterminer les coordonnées du point *G* appartenant à l'axe des ordonnées tel que les droites (BG) et (AI) soient parallèles.

Exercice 13

On considère les points $A(2;3)$, $B(6;1)$ et $C(-1;-3)$ dans un repère du plan orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Construire le point *D* image du point *B* par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

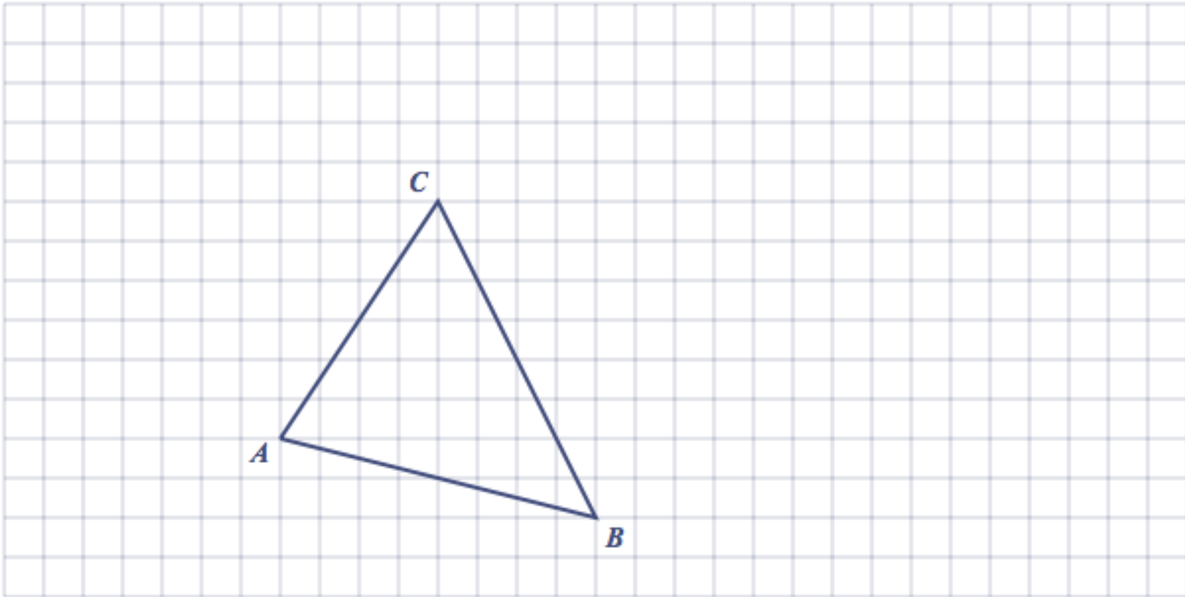
3. Calculer les coordonnées du point *D*.

4. Démontrer que le quadrilatère *ABDC* est un parallélogramme.

5. Calculer les valeurs exactes des longueurs *AD* et *BC*. Que peut-on en déduire pour *ABDC* ?

Exercice 14

ABC est un triangle.



1. Soit M le point défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Placer le point M sur la figure.

2. Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ on considère le point et D de coordonnées $(1;1)$.

a. Placer le point D sur la figure. **b.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3. Les droites (BC) et (DM) sont-elles parallèles ?

Exercice 15

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	On donne les points $A(1;2)$, $B(3;-2)$ et $C(-1;0)$. ABCD est un parallélogramme lorsque …	$D(1;-4)$	$D(-3;4)$	$D(-2;4)$	$D(5;0)$
2	On donne les points $A(-2;1)$, $B(1;-4)$ et $C(5;2)$ et I est le milieu du segment $[BC]$. Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées …	$(4;2)$	$(3;-1)$	$(5;-2)$	$(-5;2)$
3	On donne les vecteurs $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(4;-4)$. Le vecteur $2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ a pour coordonnées …	$(-4;8)$	$(4;-8)$	$(0;4)$	$\left(2;-\frac{1}{2}\right)$
4	De $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, on déduit que …	$\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
5	Les vecteurs $\vec{u}(2;-4)$ et $\vec{v}(5;x)$ sont colinéaires lorsque le nombre x est égal à …	-7	10	-10	2,5

Exercice 16

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

		A	B	C	D
1	On donne les points $A(3\,;5)$, $B(0\,;2)$ et $C(3\,;-1)$. Le triangle ABC est …	isocèle	équilatéral	rectangle	aplati
2	On donne les vecteurs $\vec{u}(-4\,;3)$ et $\vec{v}\left(2\,;-\frac{3}{2}\right)$. Alors …	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\lVert\vec{u}\rVert = 5$	$\lVert\vec{u}\rVert = \lVert\vec{v}\rVert$
3	On donne les points $A\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$, $B(2\,;2)$, $C(0\,;-2)$ et $D(4\,;0)$. Alors …	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires	$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires	(AB) et (CD) sont parallèles	A, B, C sont alignés
4	On donne $\vec{u} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \lambda\vec{j}$. Le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ s'annule pour …	$\lambda = 2$	$\lambda = -1$	$\lambda = -\sqrt{2}$	$\lambda = \sqrt{2}$

70 Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs :

$\vec{u}(3\,;9)$, $\vec{v}(-2\,;-6)$ et $\vec{w}(1\,;6)$

1. a) Calculer le déterminant du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$.

b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

AIDE

1. a) On note souvent le déterminant de $\vec{u}(x\,;y)$ et de $\vec{v}(x'\,;y')$ sous forme d'un tableau :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

71 Démontrer un alignement

ABC est un triangle.

M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **(1)**.

a) Démontrer que $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b) En déduire que les points B, C, M sont alignés.

AIDE

a) Avec la relation de Chasles, remplacer $\overrightarrow{AM}$ par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ dans l'égalité **(1)**, puis réduire l'égalité obtenue.

b) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BC}$?

05 – Configuration du plan

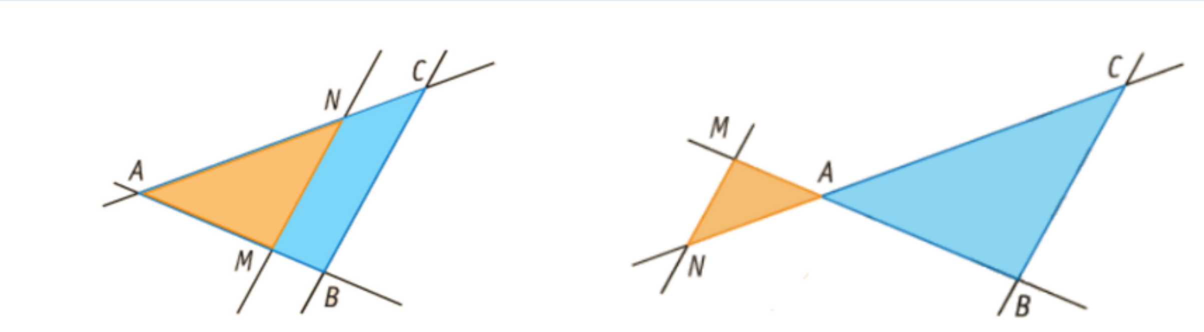
Rappel de cours

Pythagore

Dans tout triangle ABC rectangle en A on a la relation de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Réciproquement, lorsque les côtés d'un triangle ABC vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

Thalès



Si les droites (AB) et (MN) sont parallèles, alors les longueurs des triangles ABC AMN sont proportionnelles et on a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Trigonométrie

Dans un triangle ABC rectangle en B, les côtés et les angles sont liés par des relations trigonométriques :

$$\cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC} \qquad \sin \widehat{B} = \frac{BC}{AC} \qquad \tan \widehat{A} = \frac{BC}{AB}$$

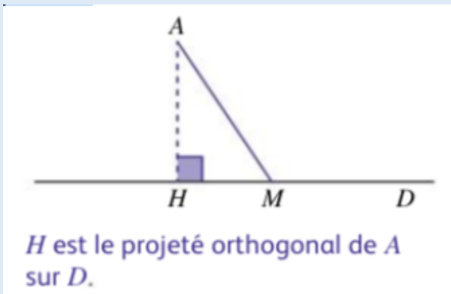
Pour tout angle aigu α d'un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Dans un triangle, la somme des angles fait 180°.

Projection orthogonale

Le projeté orthogonal de A sur une droite D est le point d'intersection de la droite D avec la perpendiculaire à D passant par A.



La distance du point A à la droite D est la plus petite distance séparant un point de D avec A. Elle est égale à AH où H est le projeté orthogonal du point A sur D.

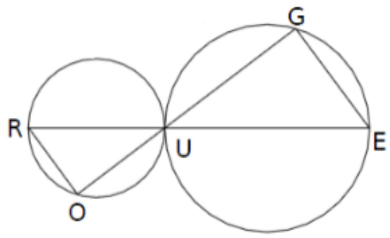
Exercice 1

On considère les cercles de diamètres $[RU]$ et $[UE]$, tel que $RU = 2$, $UE = 3$ et $UG = 2{,}4$.

1. Quelle est la nature des triangles ROU et GUE ?

2. Que peut-on dire des droites (RO) et (GE) ?

3. Calculer GE, UO et RO.



Exercice 2

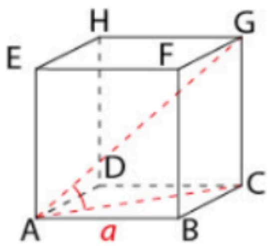
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4.

1. Calculer AC.

2. Utiliser le triangle ACG rectangle en C :

a. Pour calculer AG.

b. Pour déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{CAG}$. Arrondir à l'unité.



Exercice 3

On donne $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Calculer $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$.

Exercice 4

A est un point d'un cercle C de centre O et de rayon 6 cm. Le point B est tel que $OB = 6{,}5\,\text{cm}$ et $AB = 2{,}5\,\text{cm}$.

1. Réaliser une figure à main levée.

2. Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle.

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5\,\text{cm}$ et $AC = 7\,\text{cm}$.
On appelle H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
En exprimant de deux manières l'aire du triangle ABC, calculer la distance de A à la droite (BC).

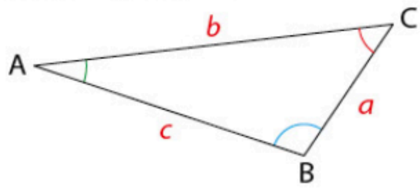
89 Relier aire d'un triangle et sinus

Chercher **Raisonner** **Calculer**

1. a, b, c désignent des nombres réels strictement positifs. ABC est un triangle tel que :

$$AB = c, \quad AC = b, \quad BC = a$$

On note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC.



a) Démontrer que $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin(\widehat{BAC})$.

b) Proposer deux autres expressions de l'aire $\mathscr{A}$.

c) En déduire l'égalité $\dfrac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \dfrac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \dfrac{c}{\sin(\widehat{BCA})}$.

2. Application

ABC est un triangle tel que :

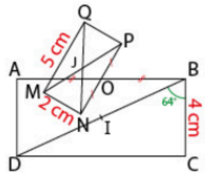
$$BC = 12\text{ cm}, \quad \widehat{BAC} = 40° \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} = 32°.$$

Calculer le périmètre, en cm, et l'aire, en cm^2, de ce triangle. *Arrondir au dixième.*

Exercice 6

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

Pour les questions **1** à **4**, ABCD et MNPQ sont les rectangles de centres respectifs I et J représentés ci-contre.
Les côtés [AB] et [PN] de ces rectangles se coupent en leur milieu O.

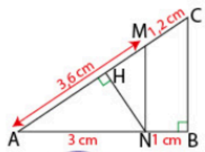


		A	B	C	D
1	Alors …	O appartient à la médiatrice du segment [BD]	la droite (JO) est la médiatrice du côté [PN]	O est le projeté orthogonal de N sur la droite (AB)	I est le projeté orthogonal de C sur la droite (BD)
2	Alors …	le projeté orthogonal de I sur la droite (PN) est O	le projeté orthogonal de O sur la droite (PM) est J	O et M ont le même projeté orthogonal sur la droite (AD)	ANBP est un parallélogramme
3	Alors …	$\cos(\widehat{MPN}) = 0{,}4$	$\tan(\widehat{MPN}) = 2{,}5$	$\widehat{MPN} \approx 22°$	$\widehat{JNM} \approx 58°$
4	Alors …	$AC \approx 8{,}2$ cm	$AB \approx 9{,}1$ cm	$\sin(64°) = \cos(26°)$	$IB \approx 3$ cm

Pour les questions **5** à **7**, EFG est un triangle rectangle en E tel que $FG = a$, avec $a > 0$ et $\cos(\widehat{EFG}) = 0{,}3$.
Pour les questions **5** à **7**, EFG est un triangle rectangle en E tel que $FG = a$, avec $a > 0$ et $\cos(\widehat{EFG}) = 0{,}3$.

		A	B	C	D
5	Alors $\sin(\widehat{EFG})$ est égal à …	$0{,}7$	$\sqrt{0{,}7}$	$0{,}91$	$\sqrt{0{,}91}$
6	Alors $\tan(\widehat{EFG})$ est égal à …	$\frac{\sqrt{91}}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{91}}$	$\frac{3}{\sqrt{0{,}91}}$	$\frac{\sqrt{9{,}1}}{3}$
7	On peut affirmer que …	$EG = 0{,}7a$	$EF = 0{,}3a$	$EF = \frac{a}{\tan(\widehat{EFG})}$	$EF^2 = a^2 + EG^2$

Pour les questions **8** à **10**, ABC est un triangle rectangle en B.
M et N sont des points des segments [AC] et [AB].
H est le projeté orthogonal de N sur la droite (AC).



		A	B	C	D
8	Alors …	$AN = \frac{1}{3}AB$	le triangle AMN est rectangle	M et H ont le même projeté orthogonal sur la droite (AB)	A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)
9	Alors …	$\widehat{BAC} \approx 34{,}5°$	$\widehat{ANH} \approx 55{,}5°$	$\widehat{HNM} \approx 33{,}6°$	$\widehat{CMN} \approx 125°$
10	Alors …	$BC \approx 2{,}5$ cm	$MN \approx 2$ cm	$HN \approx 1{,}4$ cm	$HM \approx 0{,}9$ cm

06 – Équations de droites – Systèmes

Rappel de cours

Un système suivant de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Résoudre un tel système revient à déterminer tous les couples solutions, c'est-à-dire tous les coupes vérifiant simultanément les deux équations du système.

Pour cela deux méthodes :

Méthode par substitution

Cette méthode consiste à :

* Isoler une inconnue à partir d'une équation ;
* Remplacer cette inconnue dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue ;
* Résoudre alors cette nouvelle équation ;
* Remplacer l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Méthode par combinaison

Cette méthode consiste à :

* Multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant ou en soustrayant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine.
* Résoudre l'équation à une seule inconnue.
* Remplacer l'inconnue trouvée dans une équation afin de trouver la seconde inconnue.

Intersection de droites

Résoudre le système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ revient à déterminer, s'il existe, le point d'intersection de coordonnées $(x;y)$ des droites d et d' d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.

Exercice 1

Résoudre par la méthode la plus adaptée, chacun des systèmes :

$$(S):\begin{cases}x-3y=-1\\-3x+4y=-2\end{cases}\qquad (S'):\begin{cases}3x+5y=-6\\7x+3y=12\end{cases}$$

Exercice 2

Bernard a travaillé durant l'été pendant 45 jours dans deux entreprises.
Dans la première, il a gagné 85 € par jour et dans la deuxième, 72 € par jour.
Au total, il a gagné 3487 €.
Combien de jours a-t-il travaillé dans chaque entreprise ?

Exercice 3

1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases}x+2y=-1\\2x+4y=3\end{cases}\qquad (S_2):\begin{cases}4x-3y=5\\-8x+6y=-10\end{cases}$$

2. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 4

On considère les droites d et d' d'équations respectives $-5x+7y+31=0$ et $x+2y+4=0$.
1. Déterminer les coefficients directeurs de ces 2 droites. Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 5

On considère les droites d et d' d'équations respectives $-2x+y+1=0$ et $6x-3y+a=0$.
1. Déterminer les coefficients directeurs de ces 2 droites. Que peut-on en déduire ?

2. Déterminer la valeur de a pour le système $(S):\begin{cases}-2x+y+1=0\\6x-3y+a=0\end{cases}$ ait eu infinité de solutions.

Exercice 6

Déterminer deux nombres entiers naturels tels que leur somme vaut 20, et leur quotient vaut $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 7

On considère deux droites d_1 et d_2 telles que :

* d_1 a pour équation $-4x+3y+1=0$.
* d_2 passe par le point $A(0;-1)$ et a pour pente 2.

1. Démontrer que les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 8

Soit les points $A(3;6)$ et $B(-1;2)$, et *d* la droite d'équation : $-2x-y=1$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Justifier que *A* et *B* n'appartiennent pas à *d*.

3. Déterminer une équation de chacune des droites d_1 et d_2 parallèles à *d* et passant respectivement par *A* et *B*.

Justifier que les droites (AB) et *d* sont sécantes, et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 9

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

Dans un repère orthonormé, on donne les six points : $A(1\,;2)$, $B(3\,;7)$, $C\left(\frac{1}{2}\,;-1\right)$, $D\left(\frac{5}{2}\,;4\right)$, $E(1\,;7)$ et $F(5\,;-1)$.

$\vec{u}(2\,;5)$ et $\vec{v}(1\,;6)$ sont deux vecteurs.

		A	B	C	D
1	Une équation de la droite (AC) est …	$-5x+2y+1=0$	$3x-0{,}5y+2=0$	$y=2{,}5x-0{,}5$	$y=6x-4$
2	$\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite …	(AB)	(AD)	(AF)	(EF)
3	Un vecteur directeur de la droite (AD) est …	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u}+\vec{v}$	$2\vec{u}-\vec{v}$
4	La droite (EF) passe par le point …	A	B	C	D
5	La droite (BC) ne passe pas par le point …	$J\left(0\,;-\frac{13}{5}\right)$	D	$K\left(2\,;\frac{19}{5}\right)$	$L(-2\,;-9)$
6	Une droite parallèle à l'axe des ordonnées est …	(BE)	(AE)	(BD)	(AC)
7	Deux droites parallèles sont …	(AB) et (BD)	(AC) et (BD)	(AE) et (BD)	(CF) et (BE)
8	ABDC est …	un parallélogramme	un trapèze non parallélogramme	un losange	un quadrilatère quelconque
9	Deux droites perpendiculaires sont …	(AE) et (EB)	(EB) et (DB)	(AF) et (AB)	(FC) et (AC)
10	Un point de la médiatrice du segment [DC] est…	A	C	$H(4\,;0{,}5)$	$G(-2{,}5\,;3)$

07 – Fonctions

Rappel de cours

Généralités

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
On appelle fonction f définie sur D un procédé qui à tout réel x de D associe un unique réel, noté $f(x)$.
D est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.

Si $f(a)=b$, on dit que :
* b est l'image de a par la fonction f.
* a est un antécédent de b par la fonction f.

Courbe représentative

L'ensemble des points M de coordonnées $(x;f(x))$ correspond à la courbe représentative de f.

Fonction paire, fonction impaire

$f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f$ est paire. $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow f$ est impaire.

* La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
* La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Fonctions de référence

La **fonction carré** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une parabole P de sommet l'origine du repère.

La **fonction inverse** est définie sur la réunion d'intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, noté $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une hyperbole H qui admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

La **fonction cube** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto x^3$.
La fonction cube est impaire.

Positions relatives

Pour tout réel $x \in [0;1]$ on a $x^3 \le x^2 \le x$ Pour tout réel $x \in [1;+\infty[$ on a $x \le x^2 \le x^3$

Exercice 1

Soit f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f.

2. Le point $A\left(2;\dfrac{3}{5}\right)$ est-il un point de la courbe ? Qu'en est-il pour le point $B\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{4}\right)$?

3. Quelle est la parité de la fonction f ?

4. En déduire un autre antécédent de $\dfrac{3}{5}$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $3x^2+4=31$ **b.** $x^2+15=6$ **c.** $(2-3x)^2=16$ **d.** $\dfrac{1}{x-2}=4$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $4x^2+9>25$ **b.** $4x^2+100\leq 0$ **c.** $x^3>64$ **d.** $\sqrt{x}\leq 5$

Exercice 3

1. Comparer les nombres suivants :

a. $0{,}98^2$ et $0{,}908^2$ **b.** $\dfrac{1}{4}$ et $0{,}04^2$

c. $-\dfrac{1}{0{,}03}$ et $-\dfrac{1}{0{,}029}$ **d.** $(1{,}31)^3$ et $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$

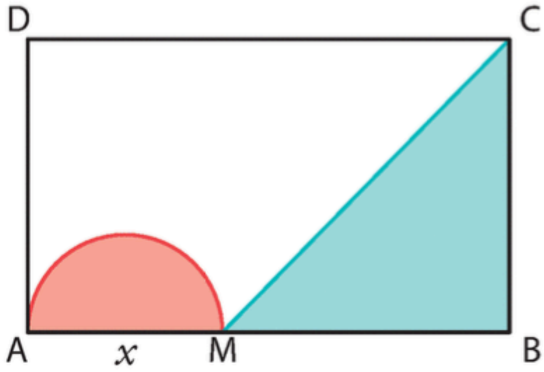
2. Soit a un nombre tel que $a>1$. Comparer les nombres suivants :

a. $1+a$; $(1+a)^2$ et $(1+a)^3$ **b.** $\dfrac{1}{a}$; $\dfrac{1}{a^2}$ et $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un rectangle. On place un point M libre sur le segment $\left[AB\right]$.
Comme sur la figure ci-contre, on trace un demi-cercle de diamètre $\left[AM\right]$ et le triangle MBC. On note x la distance AM.

Le graphique représente les aires $f\left(x\right)$ et $g\left(x\right)$ du demi-disque et du triangle.



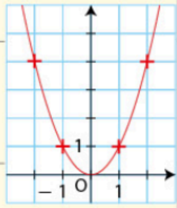
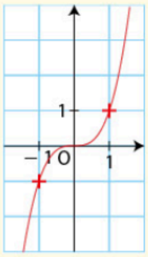
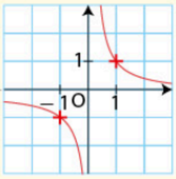
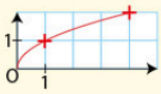
1. Identifier les courbes de f et de g. Justifier.

2. Retrouver les dimensions du rectangle $ABCD$. En déduire son aire en fonction de x.

3. Estimer graphiquement la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire, puis en donner une valeur approchée au centième.

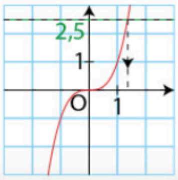
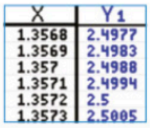
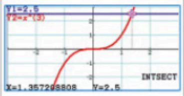
Exercice 5

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

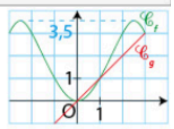
	A	B	C	D
1 Les solutions de l'équation $x^2 = 2$ sont … 	2 et -2	1 et -1	$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$	de même signe
2 L'équation $x^2 = k$ admet deux solutions distinctes …	si $k = -1$	si $k \geqslant 0$	si $k > 0$	si $k \neq 0$
3 Les solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 9$ sont les nombres…	3 et -3	de l'intervalle $[-3\,;3]$	de l'intervalle $]-3\,;3[$	de l'ensemble $]-\infty\,;-3] \cup [3\,;+\infty[$
4 L'équation $x^3 = -1$ admet … 	une unique solution	une solution positive	deux solutions opposées	deux solutions négatives
5 Les solutions de l'inéquation $x^3 < 3\sqrt{3}$ sont les nombres de l'intervalle …	$]-\infty\,;3]$	$]-\infty\,;\sqrt{3}[$	$[0\,;\sqrt{3}[$	$[0\,;\sqrt{3}]$
6 Les images de π et $-\pi$ par la fonction inverse vérifient …	$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{-\pi}$	$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{-\pi}$	$\frac{1}{\pi} < \frac{1}{-\pi}$	$\frac{1}{\pi} = -\frac{2}{-\pi}$
7 L'équation $\frac{1}{x} = k$ (avec $k \neq 0$) admet pour unique solution … 	$-k$	k	$\frac{1}{k}$	$-\frac{1}{k}$
8 Les solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < -0{,}5$ sont les nombres de l'intervalle …	$]-\infty\,;-2[$	$]-\infty\,;-0{,}5[$	$]-2\,;0[$	$]-5\,;0[$
9 L'image de $\frac{4}{3}$ par la fonction racine carrée est … 	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
10 Les solutions de l'inéquation $\sqrt{x} < 4$ sont les nombres de l'intervalle …	$]-\infty\,;16[$	$]-\infty\,;2[$	$[0\,;16[$	$]16\,;+\infty[$

Exercice 6

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	Dans un repère, le point de coordonnées $(1\,;\,7)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation …	$y=2x+7$	$y=\dfrac{7}{x-1}$	$y=\sqrt{x+7}$	$y=7x^2$
2	Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées d'un repère est …	$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$x\mapsto\sqrt{x+2}$	$x\mapsto x-3$	$x\mapsto x^4-x^2$
3	Si g est une fonction paire et f une fonction impaire, alors la fonction …	$f-g$ est paire	$-f$ est impaire	$f+g$ est paire	$f\times g$ est paire
4	La valeur de x affichée en sortie est … $x\leftarrow 0$ Tant que $x^2+1>x^3$ $\quad x\leftarrow x+0{,}01$ Fin Tant que Afficher x	1,5	1,46	1,47	1
5	h est une fonction paire telle que l'équation $h(x)=3$ admet deux solutions : 4 et …	-3	-4	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$
6	Une méthode qui ne permet pas de donner l'arrondi au millième de la solution de l'équation $x^3=2{,}5$ est …				

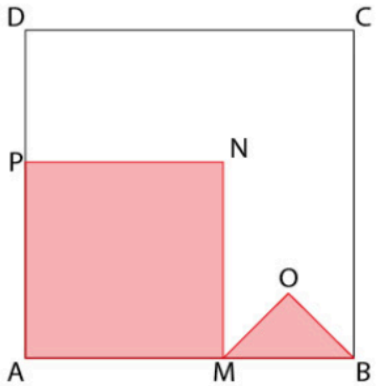
Pour les questions **7** à **10**, on donne les courbes représentatives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur l'intervalle $[-3\,;\,3]$ dans un repère.



		A	B	C	D
7	L'équation $f(x)=m$ admet quatre solutions lorsque m appartient à …	$[-3\,;-2]\cup[2\,;\,3]$	$]0\,;\,3[$	$[3\,;\,3{,}5[$	$[3{,}5\,;+\infty[$
8	L'équation $f(x)=g(x)-1$ …	n'a pas de solution	a une solution	a deux solutions	a trois solutions
9	Pour tout nombre x de l'intervalle $[1\,;\,3]$, $f(x)-g(x)$ est …	positif	négatif	nul	égal à $f(-x)+g(-x)$
10	La courbe obtenue par symétrie de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ …	représente une fonction paire	représente une fonction impaire	ne représente pas une fonction	est celle de la fonction $f-g$

102 **Relier les notions**

Chercher | Raisonner | Communiquer



ABCD est un carré de 10 cm de côté.

M est un point du segment [AB]. On construit à l'intérieur du carré ABCD un carré AMNP et un triangle MBO rectangle et isocèle en O.

On note x la longueur AM, en cm, et $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine coloré, en cm^2.

a) À quel intervalle x appartient-il ?

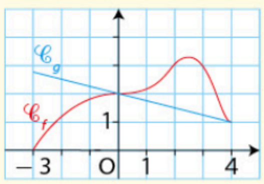
b) Démontrer que $\mathrm{OM}^2 = \frac{1}{2}(10 - x)^2$.

c) En déduire l'expression de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

d) Est-il possible de faire en sorte que l'aire du domaine coloré soit la plus grande possible ?
La plus petite possible ? Si oui, dans quel cas ?

Exercice 7

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	D'après ce graphique, la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est … 	décroissante sur $[-3\,;4]$	croissante sur $[0\,;4]$	décroissante sur $[3\,;4]$	décroissante sur $[-3\,;0]$
2	D'après ce tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-1\,;2]$… $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -1 & a & 0 & & 1 & b & 2 \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 2 & \searrow & 1 \end{array}$	$f(b) - 1 \leqslant 0$	$f(a) > f(b)$	le nombre b est un antécédent de 0 par f	pour tout nombre réel x de $[-1\,;2]$, $f(x) \geqslant -1$
3	f est une fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(2) = 1$. $f(3)$ est égal à …	-2	-1	0	5
4	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 2 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ On peut affirmer que …	f admet 1 comme maximum sur $\mathbb{R}$	$f(2) > f(5)$	f est croissante sur $[0\,;1]$	f est décroissante sur $[-1\,;0]$

		A	B	C	D
5	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\frac{2}{3}$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr></table> Ce tableau de signes peut être celui de la fonction $f : x \mapsto \dots$	$2x+3$	$-2x+3$	$6-4x$	$6x-4$
6	Si pour tout nombre réel x, $f(x)-f(5) \leqslant 0$, alors sur $\mathbb{R}$, …	5 est le maximum de f	$f(5)$ est le maximum de f	5 est le minimum de f	$f(5)$ est le minimum de f
7	Dans un repère, les points $E(0\,;3)$ et $F(3\,;-2)$ sont alignés avec …	$A(2\,;\,-2)$	$B\left(-\frac{1}{5}\,;3\right)$	$C\left(\frac{1}{2}\,;\frac{13}{6}\right)$	$D\left(\sqrt{3}\,;2{,}5\right)$
8	Une fonction qui a pour maximum 1 sur l'intervalle $[1\,;2]$ est $f : x \mapsto \dots$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$
9	Une fonction croissante sur l'intervalle $[1\,;4]$ est $f : x \mapsto \dots$	$5-2x$	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{6-x}{11}$
10	Pour tout nombre réel x, si $x<-2$ alors …	$x^2<4$	$x^2>4$	$0<x^2<4$	$x^2<-4$

08 – Informations chiffrées

Rappel de cours

Pourcentage

La proportion du nombre d'éléments de A par rapport aux nombres d'éléments de E est le quotient : $p = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$

$\text{pourcentage} = p \times 100$

Calculer t % d'un nombre N signifie multiplier N par $\dfrac{t}{100}$.

Pourcentage de pourcentage

On appelle p_1 la proportion de B dans A et p_2 la proportion de A dans E.
La proportion p de B dans E est le produit $p = p_1 \times p_2$.

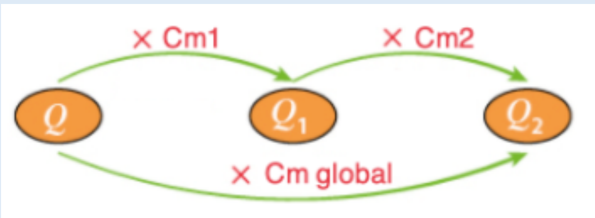
Pourcentage d'évolution

Une quantité évolue d'une valeur Q_1 a une valeur Q_2.
Le coefficient multiplicateur de cette évolution est le nombre $C_m = \dfrac{Q_2}{Q_1}$.
Le pourcentage d'évolution de Q_1 à Q_2 est $p = \left(C_m - 1\right) \times 100$

* Augmenter une quantité de p % signifie multiplier cette quantité par $1 + \dfrac{p}{100}$
* Diminuer une quantité de p % signifie multiplier cette quantité par $1 - \dfrac{p}{100}$

Évolutions successives

Lorsqu'une quantité subit plusieurs évolutions successives (augmentation ou diminution), alors le coefficient multiplicateur globale est le produit des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.



Évolutions réciproques

Deux évolutions sont dites réciproques lorsque le coefficient multiplicateur global de ces deux évolutions est égal à 1.

Exercice 1

Un sondage sur les habitudes alimentaires est effectué auprès de 1200 personnes.
174 personnes se déclarent vegan et 26 % des personnes interrogées disent suivre un régime.
1. Quel est le pourcentage de personnes vegan ?

2. Combien de personne interrogée suivent un régime ?

Exercice 2

Dans une entreprise, 70 % des employés partent en vacances en juillet, et parmi eux 60 % partent au bord de la mer.
1. Quelle est la proportion des employés de cette entreprise qui partent en vacances en juillet au bord de la mer ?

2. Combien d'employés partent en juillet au bord de la mer sachant qu'il y a 350 employés dans l'entreprises ?

Exercice 3

Durant une semaine donnée, un théâtre accueille 480 spectateurs le mardi et 450 spectateurs mercredi.
1. Déterminer le pourcentage de diminution du nombre de spectateurs entre mardi et mercredi.

2. Le nombre de spectateurs diminue de 12 % entre mercredi et jeudi.
Combien sont-ils jeudi ?

3. Le nombre de spectateurs augmente de 8 % entre mercredi et vendredi.
Combien sont-ils vendredi ?

4. En déduire le pourcentage d'augmentation du nombre de spectateurs entre jeudi et vendredi.

Exercice 4

Le tableau ci-dessous décrit l'évolution du cours d'une action du 1er janvier jusqu'au 1er juillet 2018.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Évolution d'un mois sur l'autre		+15%	+20%	+45%	-30%	-15%	-16%

1. Quel est le pourcentage d'évolution du cours de l'action entre le 1er janvier et le 1er mars 2018 ?

2. Justifier qu'au 1er juillet l'action a presque retrouvé sa valeur initiale du 1er janvier.

Exercice 5

Un parc d'attraction fait chaque année le bilan de l'attractivité de son site.
1. Entre 2016 et 2017, le nombre de visiteurs a diminué de 12 %.
Déterminer, à 0,1% près, le pourcentage d'augmentation nécessaire entre 2017 et 2018 pour revenir au nombre de visiteurs initial.

2. Entre 2018 et 2019, le nombre de visiteurs a augmenté de 4,5 %, pour s'établir début 2019 à 1463 visiteurs par jour.
Combien y avait-il de visiteurs par jour début 2018 ?

Exercice 6

La première semaine des soldes, un magasin propose 40 % de réduction sur tous les vêtements. Lors de la deuxième démarque, le magasin accorde 20 % de remise supplémentaire.
1. Calculer le coefficient multiplicateur de ces deux évolutions.

2. En déduire le coefficient multiplicateur global, puis le taux d'évolution global des prix.

3. Un article coûte 62€ avant les soldes. Quel est son prix après la deuxième démarque ?

4. Après la deuxième démarque, un article coûte 36€. Quel était son prix d'origine ?

Exercice 7

Un hôtel proposait 60 chambres en 2016.
Des travaux ont été réalisés pour augmenter la taille des chambres. À la fin des travaux en 2017, l'hôtel propose 20 % de chambres en moins.
1. En utilisant un coefficient multiplicateur, calculer le nombre de chambres proposées en 2017.

2. Le patron de l'hôtel achète en 2018 l'immeuble mitoyen, ce qui lui permet de proposer 20 % de chambres en plus qu'en 2016.
a. Calculer le nombre de chambres proposées en 2018.

b. Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de chambres de 2016 à 2018 ?

Exercice 8

Un village comptait 700 habitants en 2015. Suite à la fermeture d'une usine en 2017, 8 % des habitants du village sont partis. Heureusement, avec l'arrivée du TGV en 2019, le maire prévoit une augmentation de 25 % de la population.
Calculer le coefficient multiplicateur global. En déduire le nombre prévisible d'habitants en 2019.

Exercice 9

En 2015, la commune de Porto-Vecchio, en Corse, comptait 11 826 habitants, en augmentation de 7,17 % par rapport à 2010.
Combien la ville comptait-elle d'habitants, à l'unité près, en 2010 ?

Exercice 10

Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

		A	B	C	D
1	Dans un lycée, il y a 1 380 élèves, dont 45 % de filles. Le nombre de garçons est …	621	704	759	828
2	Les trois quarts des clients d'un gîte sont étrangers. Parmi ceux-ci, 80 % sont satisfaits de leur séjour. Le pourcentage de clients étrangers satisfaits est …	40 %	60 %	75 %	80 %
3	Diminuer une quantité de 15 %, c'est …	la multiplier par 0,15	la diviser par 0,15	la multiplier par 1,15	la multiplier par 0,85
4	Le salaire de Mélissa est passé de 1 625 € à 1 638 €. Il a augmenté de …	0,8 %	0,08 %	8 %	13 %
5	Une quantité qui a subi une hausse de 10 % puis une baisse de 50 % a …	augmenté de 55 %	baissé de 55 %	augmenté de 45 %	baissé de 45 %

Exercice 11

Dans chaque cas, donner la ou les réponse(s) exacte(s).

		A	B	C	D
1	Dans une classe de 32 élèves, 24 élèves ont un vélo. La proportion des élèves ayant un vélo est …	$\frac{24}{32}$	$\frac{3}{4}$	0,75	75 %
2	On agrandit une longueur d de 20 %. Elle devient …	$0{,}2d$	$1{,}2d$	$d+\frac{20}{100}d$	$20d$
3	La vitesse en centre ville est passée de $50\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ à $30\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le taux d'évolution est …	$\frac{30-50}{50}$	$\frac{50-30}{30}$	$-0{,}4$	-40 %
4	La population d'une ville a baissé de 4 %. Pour retrouver sa valeur initiale, elle doit …	augmenter de 4 %	être multipliée par $\frac{1}{1{,}04}$	être divisée par 0,96	être multipliée par $\frac{25}{24}$

65 Calculer un pourcentage de pourcentage

Lors d'un tournoi d'échecs, 65 % des participants sont inscrits en catégorie U16. Parmi ceux-ci, 22 % sont membres du club « Échiquier rouge ».

a) Réaliser ce schéma et le compléter avec la sous-population E des membres du club « Échiquier rouge » et avec les deux pourcentages donnés dans l'énoncé.

b) Quel pourcentage de participants au tournoi sont membres de ce club en catégorie U16 ?

AIDE

b) Penser à effectuer une multiplication.

66 Utiliser des taux d'évolution

Un magasin propose des jeans à 48 € et des pulls à 35 €.

a) Le directeur décide de réduire de 15 % le prix des jeans.
Recopier et compléter :

« Diminuer le prix de 15 % revient à multiplier ce prix par $1-\frac{\cdots}{100}$. »

En déduire le prix d'un jean après réduction.

b) Le directeur décide d'augmenter de 15 % le prix des pulls. Calculer le nouveau prix des pulls.

AIDE

On remplace $1-\frac{\cdots}{100}$ par son écriture décimale pour calculer le nouveau prix.

09 – Probabilités

Rappel de cours

Expérience aléatoire

* Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.
* L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'univers, en général noté Ω.

Probabilité

Les fréquences obtenues d'un événement *E* se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (Loi des grands nombres).
Cette valeur s'appelle la probabilité de l'événement *E*.

Probabilité d'un événement

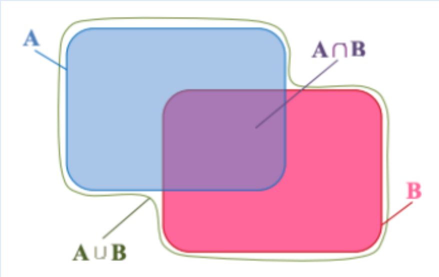
* La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
* La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
* La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Événement contraire

L'événement contraire de *A*, noté $\overline{A}$, est constitué de toutes les issues de Ω ne réalisant pas *A*.
Sa probabilité est : $P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$

Réunion et intersection de deux événements

* L'événement « *A* et *B* », noté $A\cap B$, est réalisé lorsque les deux événements *A* et *B* sont simultanément réalisés.
* L'événement « *A* ou *B* », noté $A\cup B$, est réalisé lorsqu'au moins l'un des deux événements est réalisé.



$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$$

Événements incompatibles

* On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
* Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exercice 1

On lance un dé pas équilibré à 6 faces.
On donne la loi de probabilité suivante :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,3	0,1	0,15	p	0,2	0,07

1. Calculer p.

2. On note A l'événement : « le résultat est pair » et B l'événement : « le résultat est supérieur ou égale à 4 ».
Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 2

Une urne contient des 3 boules noires et 7 boules blanches.
On tire une boule de l'urne et on regarde sa couleur, puis on la remet dans l'urne, ensuite on tire une deuxième boule et on regarde sa couleur.
1. Construire un arbre de probabilités.

2. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « On obtient 2 boules noires »
B : « On obtient 2 boules de même couleur »
C : « On obtient 2 boules de couleurs différentes »
D : « On obtient au moins une boules blanche »

Exercice 3

On tire une carte d'un jeu de 32.
On note :
A : « On obtient un as »
B : « On obtient un cœur ou un pique »
Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 4

Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la période estivale. Les résultats de ce sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Voyage à l'étranger	**Voyage en France**	**Total**
Satisfait	1209		1988
Non satisfait			
Total	1550		2500

1. Compléter le tableau.

2. On choisit au hasard un client de cette agence.
a. Déterminer la probabilité que le client soit satisfait.

b. Déterminer la probabilité que le client ne soit pas satisfait et qu'il ait effectué son voyage en France.

c. On choisit un client ayant voyagé à l'étranger. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas satisfait ?

4. On choisit un client satisfait. Quelle est la probabilité qu'il ait voyagé à l'étranger ?

5. Quelle est la probabilité que le client soit satisfait sachant qu'il a voyagé à l'étranger ?

Exercice 5

On lance un dé truqué à 4 faces F_1, F_2, F_3 et F_4.
On sait F_1 et F_2 ont la même probabilité, et que F_3 et F_4 ont aussi la même probabilité.
En revanche on sait que F_4 a une probabilité égale à trois fois celle de F_1.
Calculer la probabilité des événements F_1, F_2, F_3 et F_4.

Exercice 6

On joue avec un dé truqué à 6 faces. On lance une fois ce dé. On sait que :

* La probabilité d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 est la même.
* La probabilité d'obtenir un 6 est égale à $\frac{1}{2}$.

1. Soit A l'événement : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 ». Calculer $p(A)$.

2. Soit B l'événement : « obtenir 1 ». Déterminer $p(B)$.

3. Soit C l'événement : « obtenir un nombre pair ». Déterminer $p(C)$.
En déduire la probabilité d'obtenir un nombre impair.

Exercice 7

Voici les résultats d'un sondage effectué en 1999 auprès de 2000 personnes, à propos d'internet :

* 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par internet.
* 35% des personnes interrogées ont moins de 30 ans et, parmi celles-ci, quatre cinquièmes déclarent être intéressées par internet.
* 30% des personnes interrogées ont plus de 60 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par internet.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Intéressées par internet	**Non intéressées par internet**	**Total**
Moins de 30 ans			
De 30 à 60 ans			
Plus de 60 ans			
Total			2000

2. On choisit au hasard une personne parmi les 2 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :
A : « la personne interrogée a moins de 30 ans »,
B : « la personne interrogée est intéressée par Internet ».

a. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.

b. Définir par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer $p(\overline{A})$.

c. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer $p(A \cap B)$. En déduire $p(A \cup B)$.

3. On sait maintenant que la personne interrogée est intéressée par internet.
Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 30 ans ?

4. La personne interrogée a entre 30 ans et 60 ans. Calculer la probabilité qu'elle ne s'intéresse pas à internet.

5. Déterminer la probabilité que la personne interrogée ait entre 30 ans et 60 ans sachant qu'elle ne s'intéresse pas à internet.

Exercice 8

Un grossiste livre 80 poissons à un restaurateur. Or, 15 d'entre eux sont trop petits et 5 ne sont pas frais (dont 2 qui sont à la fois trop petits et pas frais). Hélas, le restaurateur ne se gêne pas pour tous les faire griller et les proposer à ses clients. Ne se doutant de rien, un client entre dans le restaurant et commande un poisson grillé.
On note G le fait que le poisson soit suffisamment grand et F sa bonne fraîcheur.
1. Calculer la probabilité que le client tombe malade (en supposant que son estomac ne supporte pas le poisson qui n'est pas frais).

2. Compléter un tableau à doubles entrées suivant :

	F	$\overline{F}$	Total
G			
$\overline{G}$			
Total			80

3. Calculer $P\left(F \cap G\right)$ et $P\left(F \cup G\right)$.

4. Sachant que le poisson est trop petit, quelle est la probabilité qu'il soit frais ?

5. Le poisson est frais. Quelle est la probabilité qu'il soit trop petit ?

Exercice 9

Les ateliers Nord et Sud d'une même entreprise produisent chaque jour des pièces d'un unique modèle. Certaines pièces sont malheureusement défectueuses. On donne ci-dessous la production journalière de l'entreprise.

	Pièces défectueuses	**Pièces non défectueuses**	**Total**
Nord	22		1100
Sud			
Total		1951	2000

1. Compléter le tableau.

2. Déterminer la probabilité que la pièce soit défectueuse et provienne de l'atelier Nord.

3. Déterminer la probabilité que la pièce provienne de l'atelier Sud.

4. La pièce est défectueuse. Déterminer la probabilité que la pièce provienne de l'atelier Nord.

5. Déterminer la probabilité que la pièce ne soit pas défectueuse sachant qu'elle provienne de l'atelier Sud.

Exercice 10

Pour les questions **1** à **3**, A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire d'univers E tels que :

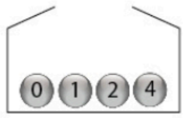
$P(A) = 0{,}35$; $P(B) = 0{,}42$; $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$

		A	B	C	D
1	La probabilité $P(\overline{A} \cup B)$ est égale à …	0,92	0,82	$P(\overline{A}) + P(A \cap \overline{B})$	$1 - P(\overline{A} \cap B)$
2	La probabilité $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ est égale à …	0,77	0,5	$1 - P(A \cap B)$	$P(A \cap B)$
3	La probabilité $P(A \cup \overline{B})$ est égale à …	0,93	$1 - P(\overline{A} \cup B)$	$1 - P(A \cap B)$	0,85

Pour les questions **4** à **6**, on tire au hasard, successivement et avec remise, deux cartes dans un jeu de 32 cartes. Chacune des 1 024 issues de cette expérience est un couple de cartes, par exemple (As de cœur ; Roi de pique).

		A	B	C	D
4	A est l'événement : « Avoir un Roi et un As ». Alors …	A est réalisé par 16 issues	A est réalisé par 32 issues	$P(A) = \frac{1}{64}$	$P(A) = \frac{1}{16}$
5	B est l'événement : « Avoir au moins une fois la Dame de carreau ». Alors …	B est réalisé par 63 issues	B est réalisé par 62 issues	$P(B) = \frac{31}{512}$	$P(B) = \frac{3}{32}$
6	A et B sont les événements des questions **4** et **5**. Alors …	A et B sont incompatibles	$A \cap B \neq \varnothing$	$P(A \cup B) = \frac{91}{1024}$	$P(A \cap B) = \frac{79}{1024}$

Pour les questions **7** à **10**, on tire au hasard, successivement et avec remise, deux boules de l'urne ci-contre.
On effectue alors le produit des numéros obtenus.



		A	B	C	D
7	Un exemple d'issue de cette expérience aléatoire est …	(1 ; 4)	(0 ; 1)	3	4
8	L'univers E de cette expérience aléatoire comporte …	16 issues	6 issues	7 issues	2 issues
9	A est l'événement « L'issue est 0 » et B est l'événement « L'issue est 2 ». Alors …	$P(A) = \frac{1}{6}$	$P(A) = \frac{7}{16}$	$P(\overline{B}) = \frac{5}{6}$	$P(B) = \frac{7}{8}$
10	A et B sont les événements de la question **9**. Alors …	$P(A \cap B) \neq 0$	$P(A \cap \overline{B}) < P(\overline{A} \cap B)$	$P(A \cup B) = \frac{9}{16}$	$P(\overline{A} \cup B) > P(A \cup \overline{B})$

Correction

01 – Manipuler les nombres réels

Exercice 1

On raisonne par l'absurde.

On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Dans ce cas, il existe un entier relatif a et un entier naturel n tel que $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$, alors $a=\frac{10^n}{3}$.

Or une puissance de 10 n'est jamais divisible par 3, car la somme de ses chiffres est égale à 1, donc la fraction n'est pas entière.
Ainsi, le nombre a ne serait pas entier, ce qui contredit l'hypothèse !
On en déduit que 3 n'est pas un nombre décimal.

Exercice 2

On raisonne par l'absurde en supposant qu'on peut écrire $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ sous forme irréductible.

Alors $2=\frac{a^2}{b^2}$, donc $a^2=2b^2$.

Donc a^2 est pair. Ce qui implique que a est pair. Donc a s'écrit $a=2k$, autrement dit $a^2=4k^2$.

Donc $4k^2=2b^2$ donc $b^2=2k^2$. Donc b est pair.

Donc la fraction $\frac{a}{b}$ est simplifiable par 2. Elle n'est donc pas irréductible. Contradiction.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 3

1. $A=5{,}555...$
$\Leftrightarrow 10A=55{,}555...$
$\Leftrightarrow 10A-A=55{,}555...-5{,}555...$
$\Leftrightarrow 9A=50$
$\Leftrightarrow A=\frac{50}{9}$

2. $B=1{,}333...$
$\Leftrightarrow 10B=13{,}333...$
$\Leftrightarrow 10B-B=13{,}333...-1{,}333...$

$\Leftrightarrow 9B = 12$

$\Leftrightarrow B = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

$C = 2{,}1212...$
$\Leftrightarrow 100C = 212{,}1212...$
$\Leftrightarrow 100C - C = 212{,}1212... - 2{,}1212...$
$\Leftrightarrow 99C = 210$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{210}{99} = \dfrac{70}{33}$

$D = 12{,}3123123...$
$\Leftrightarrow 1000D = 12312{,}3123123...$
$\Leftrightarrow 1000D - D = 12312{,}3123123... - 12{,}3123123...$
$\Leftrightarrow 999D = 12300$

$\Leftrightarrow D = \dfrac{12300}{999} = \dfrac{4100}{333}$

Exercice 4

1. $777775 > 777774$ donc $A > 1$ et $777775 < 777776$ donc $B < 1$. Ainsi $B < A$.

2. $C = A - 1$

$C = \dfrac{777775}{777774} - 1$

$C = \dfrac{777775}{777774} - \dfrac{777774}{777774}$

$C = \dfrac{1}{777774}$

$D = 1 - B$

$D = 1 - \dfrac{777775}{777776}$

$D = \dfrac{777776}{777776} - \dfrac{777775}{777776}$

$D = \dfrac{1}{777776}$

3. $777774 < 777776$ donc $\dfrac{1}{777774} > \dfrac{1}{777776}$ ainsi $C > D$.

4. On a $C > D$, donc l'écart entre 1 et *A* est plus grand que l'écart entre 1 et *B*.
Donc *B* est plus proche de 1 que *A*.