# 04 : Équations

## I. Notion d'équation

### 1. Vocabulaire

Une **équation à une inconnue** est une égalité dans laquelle intervient un nombre dont on ne connaît pas la valeur.
Ce nombre inconnu est souvent désigné par une lettre.
**Résoudre une équation** à une inconnue, c'est trouver toutes les valeurs possibles de cette inconnue.
Un nombre qui vérifie l'égalité est une solution de l'équation.

**Exemple**

On veut résoudre l'équation $4x-5=2x+11$ C'est-à-dire on veut chercher la valeur de $x$ pour laquelle l'égalité est vraie.
La solution ici est $x=8$. En effet on a $4\times 8-5=27$ et $2\times 8+11=27$.

### 2. Application

**1.** Vérifier si 15 est solution de l'équation : $3(x-4)=2x+3$.

**2.** On donne l'équation $x^2-x-6=0$.
Vérifier si les nombres $-2$, 0, 3 et 10 sont solution de cette équation.

## II. Propriétés des égalités

**Propriété 1**

Une égalité reste vraie lorsque l'on ajoute ou l'on soustrait un même nombre à chacun de ses membres.
*a*, *b* et *c* désignent des nombres relatifs.

Si $a=b$ alors $a+c=b+c$.
Si $a=b$ alors $a-c=b-c$.

**Exemples**

Si $x-5=3$, on ajoute 5 à chacun de ses membres.
$x-5+5=3+5$, on obtient alors :
$x=8$.

Si $x+6=4$, on soustrait 6 à chacun de ses membres.
$x+6-6=4-6$, on obtient alors :
$x=-2$.

**Propriété 2**

Une égalité reste vraie lorsque l'on multiplie ou l'on divise chacun de ses membres par un même nombre non nul.
*a*, *b* et *c* désignent des nombres relatifs, avec $c\neq 0$.

Si $a=b$ alors $a\times c=b\times c$.
Si $a=b$ alors $a\div c=b\div c$.

**Exemples**

Si $\frac{x}{4} = -3$, on multiplie par 4 chacun de ses membres.
$\frac{x}{4} \times 4 = -3 \times 4$, on obtient alors :
$x = -12$.

Si $-3x = 15$, on divise par $-3$ chacun de ses membres.
$\frac{-3x}{-3} = \frac{15}{-3}$, on obtient alors :
$x = -5$.

**Remarque**

Pour résoudre une équation à une inconnue, on utilise les propriétés des égalités.

**Exercice 1**

Résoudre les équations suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $x - 5 = 7$ | $x + 3 = 1$ | $3x = -21$ |
| $\frac{x}{5} = -4$ | $2x - 3 = 13$ | $1 - 3x = 22$ |
| $2x - 5 = 15 - 3x$ | $4(x-1) = x - 11$ | $2(x-3) = 5(x-2)$ |

$(x-4)(5+x) = (1-x)(3-x)$.

## III. Équation produit

**Propriété**

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
$a$ et $b$ désignent des nombres relatifs.

$$a \times b = 0 \text{ ssi } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

**Exemple**

On considère l'équation $(3x-6)(5x+30) = 0$. C'est une équation produit.
On écrit alors :
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

Soit $3x - 6 = 0$
$3x = 6$
$x = \frac{6}{3}$
$x = 2$

Soit $5x + 30 = 0$
$5x = -30$
$x = \frac{-30}{5}$
$x = -6$

Les solutions sont donc : $-6$ et 2.

**Exercice 2**

Résoudre les équations suivantes :

$(2x+8)(4x+24)=0$ $\quad$ $(-x-5)(14-7x)=0$ $\quad$ $(5-3x)(4x+10)=0$

$x(-x+3)=0$ $\quad$ $(5x-10)(8-4x)=0$ $\quad$ $(5x-4)^2=0$

$(7x-1)(1-7x)=0$ $\quad$ $(4x-12)(15+5x)(8-4x)=0$.

**Exercice 3**

On veut résoudre l'équation : $(4x-7)(2-3x)+(4x-7)(4x+5)=0$.

**1.** Factoriser le premier membre de l'équation.
**2.** Résoudre cette équation.

**Exercice 4**

On considère l'expression : $E=x^2-9-(2-5x)(x-3)$.

**1.** Factoriser $x^2-9$.
**2.** En déduire une factorisation de *E*.
**3.** Résoudre $E=0$.

**Exercice 5**

Jacob choisit un nombre.
Il multiplie ce nombre par 3, puis soustrait 8 au résultat obtenu.
Il remarque qu'il obtient alors le nombre de départ.
Quel est le nombre choisi par Jacob ?

## IV. Équation carré

**Propriété**

On veut résoudre l'équation $x^2=a$, où $a$ est un nombre.

- Si $a<0$, l'équation n'a pas de solution.
- Si $a=0$, l'équation a une seule solution, $x=0$.
- Si $a>0$, l'équation a deux solutions opposées, $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$.